Fundamentos de Matemática para Biocientistas

16 de setembro de 2022

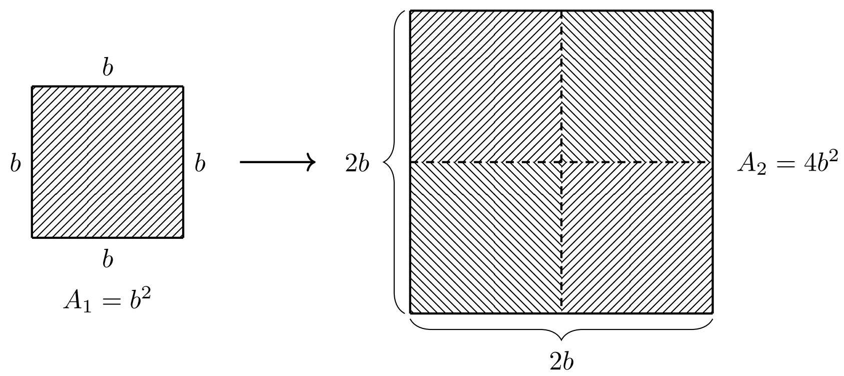
Sumário

Capítulo 1

A Matemática está em tudo

Alguns exemplos:

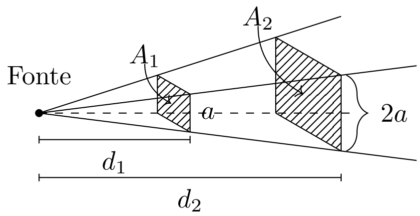
1) Dobrando as dimensões lineares de uma figura plana, a área quadruplica.



OBS: Multiplicando cada dimensão linear por n, a área passará a ser n vezes a original.

2) As intensidades luminosa e sonora de fontes pontuais, caem com o quadrado da distância à fonte.

A grandeza intensidade (I) é definida como: $\dfrac{\frac{\text{Energia}}{\text{tempo}}}{\text{Área}}$. Em unidades do Sistema Internacional de Medidas temos: $I = \dfrac{\text{Watt}}{m^2}$.



Seja $\dfrac{d_2}{d_1} = 2$

$A_1 = a \times a = a^2$

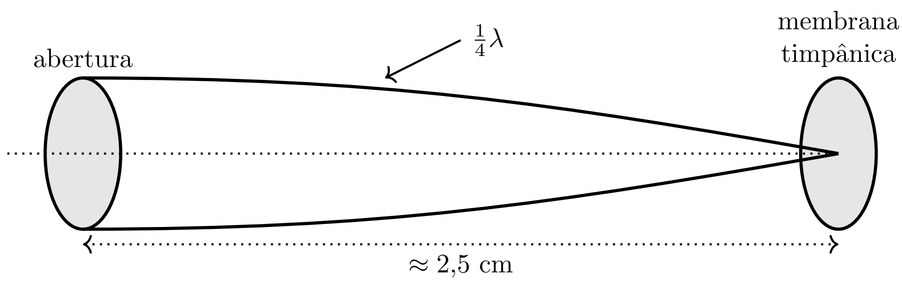
$A_2 = 2a \times 2a = 4a^2$

3) A intensidade da luz na imagem pelo microscópio óptico, cai com o quadrado do aumento, para uma mesma fonte, onde se mantém fixa a intensidade da fonte (consequência do exemplo 2, acima).

   $I \propto \dfrac{1}{M^2}$; onde M representa o aumento.

4) Frequências sonoras de ressonância no meato acústico externo da orelha. No desenho, está representada esquematicamente a orelha externa, aberta no pavilhão da orelha e fechada na membrana timpânica. Entre as duas estruturas, o meato acústico externo, cujo comprimento é de cerca de 2,5 cm.

Portanto, para efeitos de ressonância sonora, o meato acústico externo, é um tubo aberto de um lado, e fechado no outro. Então, o maior comprimento de onda (λ) de ressonância neste tubo, terá um valor quatro vezes maior do que o comprimento do tubo.



Considerando a velocidade do som no ar $v = 340$ m/s e o comprimento de onda $\lambda = 4 \times 2{,}5 = 10$ cm $= 0{,}1$ m corresponde ao som mais grave de ressonância no tubo, podemos calcular a frequência de ressonância no meato acústico externo, pois:

$$v = \lambda \times f \implies 340 \text{ m/s } = 0{,}1 \text{ m } \times f \implies f \approx 3400 \text{ Hz}$$

Verifica-se que esta frequência corresponde à frequência da fala, o que quer dizer que o meato acústico externo amplifica frequências que chegam à orelha correspondentes às da fala!

5) Aumento máximo do microscópio óptico. O olho humano é capaz de discernir dois pontos (em alto contraste) distando 0,2 mm entre si, quando observados em um anteparo a 25 cm do olho.

   Já o microscópio óptico, em razão do fenômeno da difração da luz no orifício da lente objetiva, distingue dois pontos luminosos distando entre si 0,2 μm (micrômetros). Qual o aumento máximo proporcionado pelo M.O.?

   Solução:
$$M = \frac{0{,}2 \text{ mm}}{0{,}2 \mu\text{m}} = \frac{0{,}2 \times 10 \mu\text{m}}{0{,}2 \mu\text{m}} = 1000\times$$
   "Mil vezes de aumento".

6) Números "f" de objetivas fotográficas. Estes números determinam a abertura da lente, em função do diâmetro do diafragma, o que determinará a intensidade da luz no chip da câmara fotográfica.

   Ex.: Com o diafragma fechado de forma a gerar uma abertura de 5 mm de diâmetro, para uma objetiva de 110 mm de distância focal, temos:

   Número "f": $\dfrac{f}{22} = \dfrac{100 \text{ mm}}{22} = 5$ mm

   Sequência de "números f" para uma lente objetiva é a seguinte:

$$\frac{f}{2}; \frac{f}{2{,}8}; \frac{f}{4}; \frac{f}{5{,}6}; \frac{f}{8}; \frac{f}{11}; \frac{f}{16}; \frac{f}{22}$$

   Se fizermos os cálculos das razões entre os denominadores consecutivos das diversas frações acima, encontraremos:

$$\frac{2{,}8}{2} \approx \frac{4}{2{,}8} \approx \frac{5{,}6}{4} \approx \frac{8}{5{,}6} \approx \frac{11}{8} \approx \frac{16}{11} \approx \frac{22}{16} \approx \sqrt{2}$$

Isto significa que variando a abertura em um passo no sentido horário, ou anti-horário teremos a área da entrada de luz dividida por 2 ou multiplicada por 2, considerando que a abertura do diafragma da lente é circular, e a área do círculo é $4\pi R^2$, onde R varia, em relação aos vizinhos, por um fator $\sqrt{2}$.

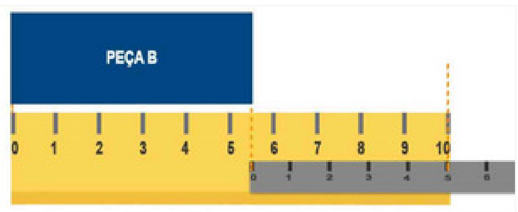
7) Escala vernier

Pierre Vernier foi um matemático francês nascido no final do século XVI, inventor de instrumentos, dentre os quais, aquele utilizado para medidas de objetos ou projeções métricas, que leva seu nome: a escala vernier. Esta escala é adaptada em paquímetros. Como exemplo (figura abaixo), representamos uma situação em que o paquímetro permite medidas em até décimos de milímetro:

Neste desenho esquemático, a escala superior está calibrada em milímetros (por exemplo). A escala inferior, apresenta 10 partes igualmente espaçadas, para um comprimento correspondente a 9 partes, na escala original. Isto significa que, deslocando lentamente a escala inferior para a direita, suas linhas divisórias irão coincidir com as linhas acima, na ordem 1, 2, 3, . . . até que o zero da escala inferior coincida com o "1" da superior, o que simultaneamente ocorrerá para o "10" da inferior, relativamente ao "10" da superior. Teremos 10 pontos de coincidências em sequência, para cada posição numérica da escala superior, mostrando que, com a escala vernier apresentada, nosso sistema adquire a possibilidade de medir de 0,1 em 0,1 unidades da escala original, o que aumenta nossa precisão em 10 vezes.

A figura ... representa um paquímetro, com um corpo de referência, onde são gravadas as escalas em centímetro e polegada. Na parte menor, móvel estão as escalas vernier, para frações de milímetros (abaixo) e frações de polegadas (acima).

Exemplo:
Seja medir o objeto azul com um paquímetro. Na representação do instrumento (figura abaixo) a escala superior é fixa, enquanto a inferior se desloca para permitir a medida da dimensão linear do objeto. Considerando a escala de referência em milímetros, verificamos que o objeto mede 5 mm + 0,5 mm (a escala inferior coincide com a superior na quinta marcação). Portanto, o comprimento vale 5,5 mm.

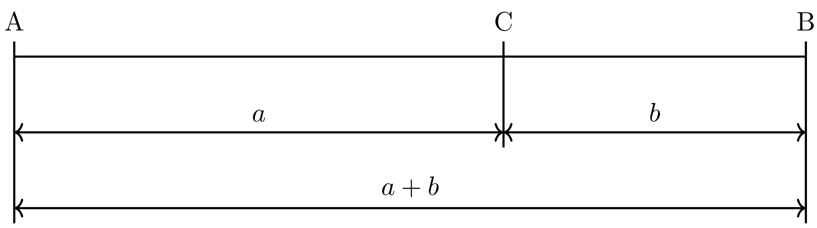


8) Proporção Áurea

Proporção áurea, razão áurea, número de ouro, número áureo, número mágico, secção áurea, proporção de ouro, tem sua origem na Grécia, antes mesmo do tempo do matemático Euclides, que a descreveu na proposição: dividir um segmento de reta em média e extrema razão.

Diz-se que o ponto C divide o segmento AB em média e extrema razão, se a razão entre o comprimento do maior segmento e o do menor dos segmentos produzidos for igual à razão entre o segmento original e o maior segmento produzido. Esta afirmação é equivalente a dizer que, na figura abaixo, o comprimento dos segmentos AB, AC e CB, isto é, "$a+b$", "a" e "b", formam uma Progressão Geométrica. Então, podemos escrever:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$



Consideremos a igualdade $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Se dividirmos ambos os membros do segundo termo desta igualdade por b, e fazendo $\frac{a}{b} = x$, teremos a expressão:
$x = \frac{x+1}{x}$, a qual corresponde à equação do segundo grau $x^2 = x + 1$ $\implies$ $x^2 - x - 1 = 0$, cujas raízes são:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Podemos separar as duas raízes como:

$$x_1 = +\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Considerando a raíz positiva, pois a raiz negativa corresponde a um ponto C exterior ao segmento AB, temos:

$$x = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803398875\ldots$$

A este número, indicaremos pela letra grega φ.

A proporção que leva ao número φ, é associada a um senso de harmonia e beleza tanto nas artes gráficas, como em alguns monumentos arquitetônicos históricos e na natureza, como no padrão de organização da formação de sementes em flores, em caracóis, conchas marinhas, etc. Entretanto, não há comprovação científica de que a proporção áurea seja um requisito para tornar objetos agradáveis, esteticamente.

Alguns exemplos de expressões matemáticas e figuras geométricas que levam ao número φ são dados abaixo:

1) Sequência de Fibonacci.

   No século XVIII, o matemático italiano Leonardo Fibonacci elaborou uma sequência numérica infinita que se tornou bastante popular.

   Começando pelo número 1, cada próximo termo da sequência, é formado pela soma de cada numeral com o número que o antecede. Os primeiros números dessa sequência são os seguintes: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ... Verifique a obtenção de alguns dos termos: $1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 2 = 5$; etc.

   O limite das razões entre cada termo e o antecessor aproxima-se do número Phi (φ), como mostrado abaixo:

$$\frac{2}{1} = 2\,;\ \frac{3}{2} = 1{,}5\,;\ \frac{5}{3} = 1{,}666\ldots\,;\ \frac{8}{5} = 1{,}6\ldots\,;\ \frac{13}{8} = 1{,}625\ldots$$

2) Série de frações sucessivas

   A aproximação do número áureo φ também é obtida quando aproximamos uma representação da série de frações usando números "1", como mostrado abaixo

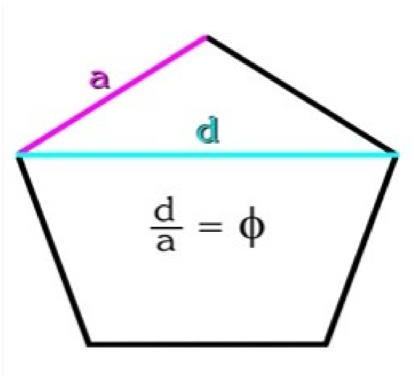
$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + e}}}$$

$$1,1 = 1 + \frac{1}{1} = 2\,;\ 1,1,1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{3}{2} = 1{,}5\,;$$

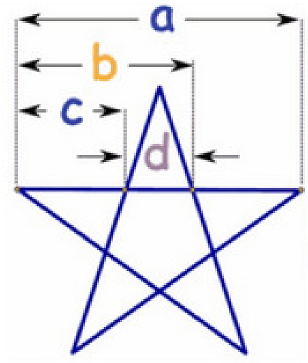
$$1,1,1,1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}666\,;\ \text{etc}\ldots$$

3) Figuras geométricas:

   - Proporção áurea no pentágono regular

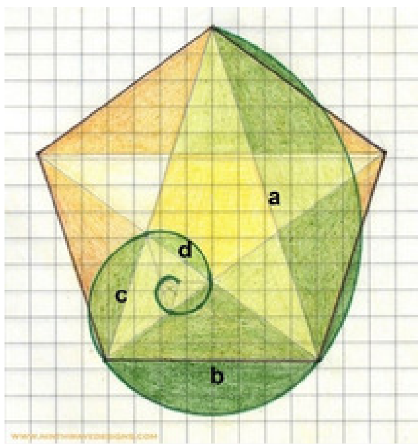


- Proporções áureas no pentagrama



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = 1{,}618\ldots = \varphi$$

- Combinando o pentagrama e o pentágono regular (considerando as mesmas letras do desenho anterior).



O matemático canadense W. W. Sawyer em seu livro "A Prelude to Mathematics - Dover Publications, Inc. New York, 1982" afirma:

"A Matemática é a classificação e estudo de todos os possíveis padrões... Padrão é para ser entendido num sentido bastante amplo, de tal forma a cobrir quase qualquer tipo de regularidade que possa ser reconhecida pela mente: A vida, e certamente a vida intelectual, só é possível porque há certas regularidades no mundo."

Padrões elementares são encontrados em tabelas de multiplicação.

Múltiplos de $2\times$ e $5\times$ são fáceis de identificar, pois na tabela de $2\times$ os dígitos finais são pares e na de $5\times$ são "0" ou "5".

Algumas outras regularidades são mais difíceis de identificar, como por exemplo as da tabela $7\times$. Veja:

Os dígitos finais de 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, são:

7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3, 0, e as diferenças entre os vizinhos, a partir da esquerda, são:

-3, -3, $+7$, -3, -3, $+7$, -3, -3, -3, o que mostra um ritmo aparente. Além disso, os dígitos finais da tabela de $7\times$, lidos de trás para frente, são aqueles da tabela de $3\times$!

Verifique: $3 \times 0 = 0$, $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 6$, $3 \times 3 = 9$, $\ldots$, $3 \times 9 = 27$.

Capítulo 2

Relações e Funções

2.1 Produto Cartesiano

$$A \times B = \{(x, y) | \, x \in A \text{ e } y \in B\}$$

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{e} \quad B = \{2, 4\}$$

$$A \times B = \{(1, 2);\ (1, 4);\ (2, 2);\ (2, 4);\ (3, 2);\ (3, 4)\}$$

$$B \times A = \{(2, 1);\ (2, 2);\ (2, 3);\ (4, 1);\ (4, 2);\ (4, 3)\}$$

OBS:

a) $A \times B \neq B \times A$

b) $A \times B = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$

c) $A \times B \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$

2.1.1 Relações Binárias

Qualquer subconjunto de $A \times B$.

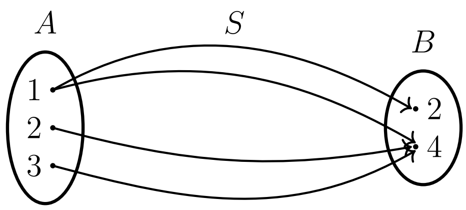
Exemplos:

a) $S = \{(x, y) \in A \times B \,|\, x < y\} = \{(1, 2); (1, 4); (2, 4); (3, 4)\}$

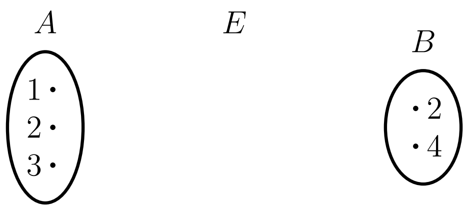
b) $E = \{(x, y) \in A \times B \,|\, y = 3x\} = \emptyset$

Gráficos de flechas

a)



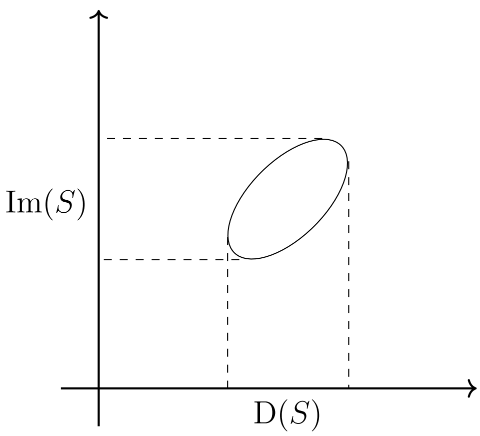
b)



2.1.2 Domínio e Imagem

O conjunto dos elementos de A dos quais sai alguma flecha é o *domínio* de S: $\mathrm{D}(S)$.

O conjunto dos elementos de B nos quais chega alguma flecha de S é a *imagem* de S: $\mathrm{Im}(S)$.



Nos exemplos anteriores:

$$\mathrm{D}(S) = A \qquad \mathrm{Im}(S) = B$$

$$\mathrm{D}(S) = \emptyset \qquad \mathrm{Im}(S) = \emptyset$$

$\mathrm{D}(S) \subset A$ e $\mathrm{Im}(S) \subset B$

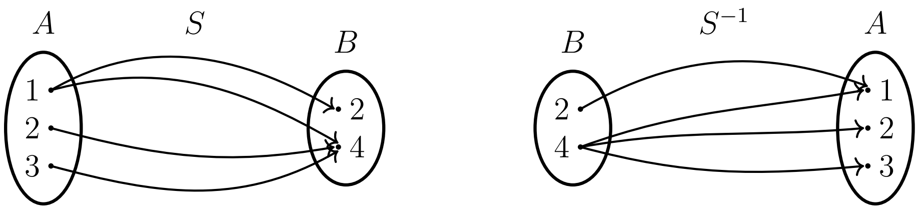
2.1.3 Relações Inversas

Se $S = \{(x, y) \in A \times B \,|\, x * y\}$ a relação $S^{-1} = \{(x, y) \in B \times A \,|\, y * x\}$

Nos exemplos dados:

$$S^{-1} = \{(2,1); (4,1); (4,2); (4,3)\} = \{(x, y) \in B \times A \,|\, y < x\}$$

$$E^{-1} = \emptyset = \{(x, y) \in B \times A \,|\, x = 3y\}$$

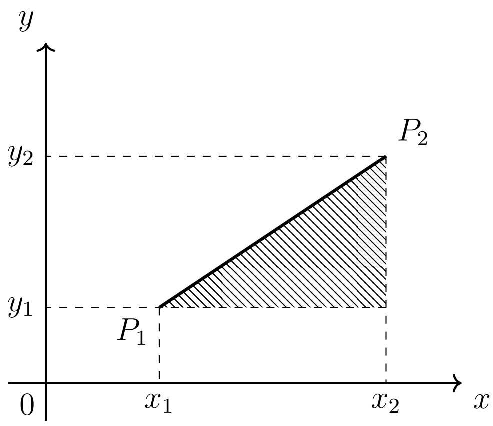


2.2 Geometria Analítica Plana

2.2.1 Fórmula da distância entre dois pontos

Sejam $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ dois pontos do $\mathbb{R}^2$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

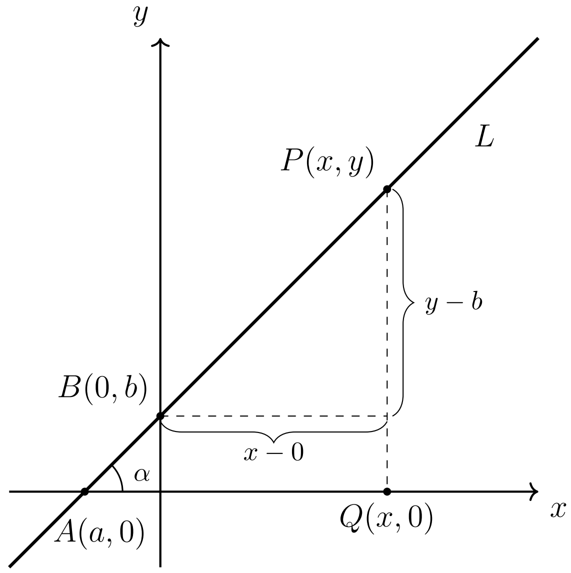


Exemplo: Calcule a distância entre os pontos $P_1(-4, -3)$ e $P_2(2, 7)$.

$$|P_1P_2| = \sqrt{[2 - (-4)]^2 + [7 - (-3)]^2} = \sqrt{36 + 100} = 2\sqrt{34}$$

2.2.2 Equação da reta

É uma equação do 1º grau com duas variáveis.



Seja a reta L que faz ângulo α com o eixo dos x.

$$m = \text{ tg } \alpha = \frac{y-b}{x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = mx + b}$$

Equação geral:

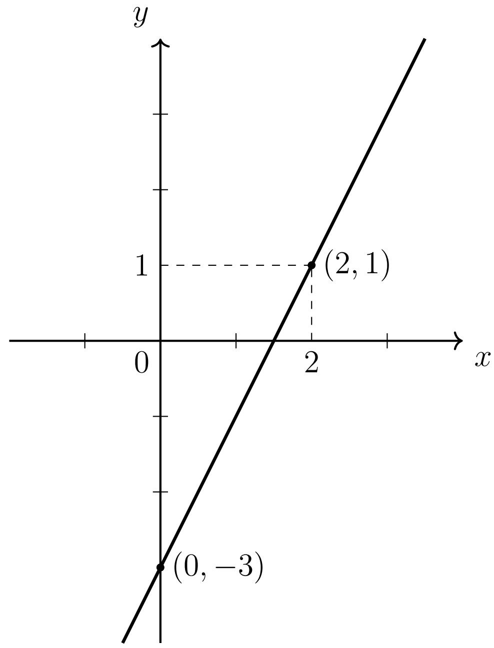
$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = \underbrace{-\frac{A}{B}}_{m}\, x \underbrace{-\frac{C}{A}}_{b}; \quad B \neq 0$$

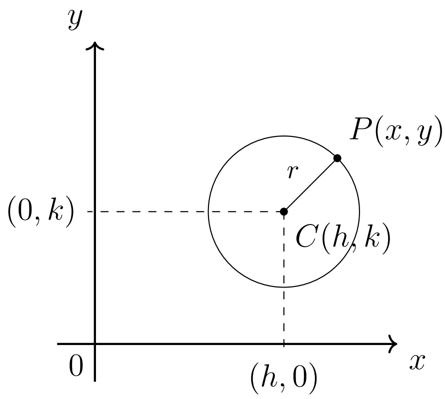
<u>Exemplo:</u> Dê o gráfico da relação $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 2x - 3\}$.

x	y
0	-3
2	1



2.2.3 Equação do círculo (circunferência)

Lugar geométrico dos pontos de plano que equidistam de um ponto fixo denominado de centro.

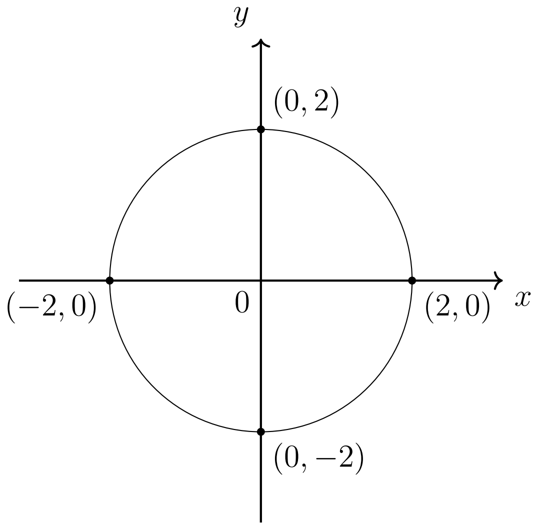


$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r\}$$

ou

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$

Exemplo: Construa o gráfico de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$

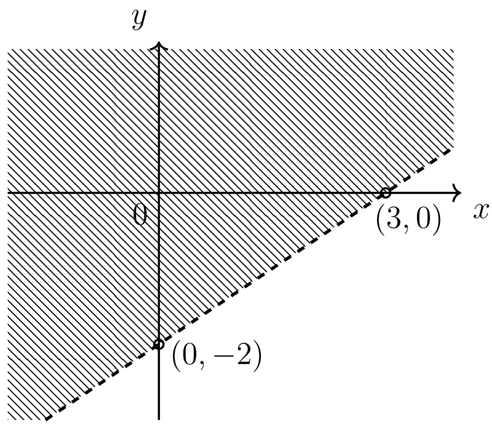


2.3 Exercícios

1. Construa o gráfico da relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x - 3y < 6\}$.

   $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > \frac{2}{3}x - 2\right\}$

Logo, $(x_1, y_1) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow P_1$ está acima do gráfico de $y = \frac{2}{3}x - 2$.



2. Construa o gráfico cartesiano das relações:

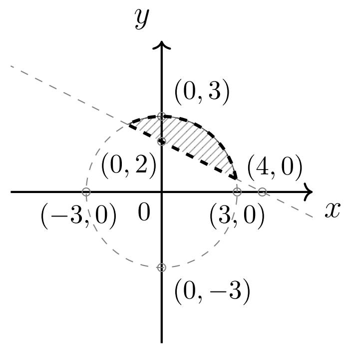
   a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 9 \text{ e } x + 2y > 4\}$

      $R = R_1 \cap R_2$, onde

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 9\}$$

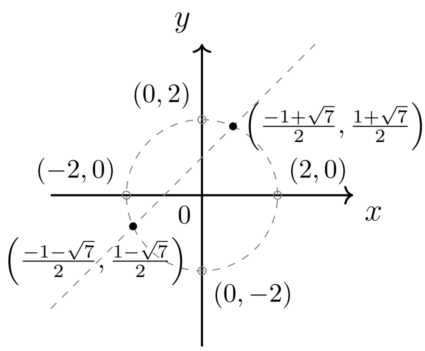
e

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 2y > 4\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > -\frac{1}{2}x + 2\right\}$$

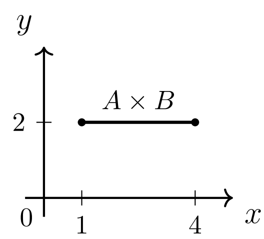


b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4\,; \\ y - x = 1 \end{cases}$

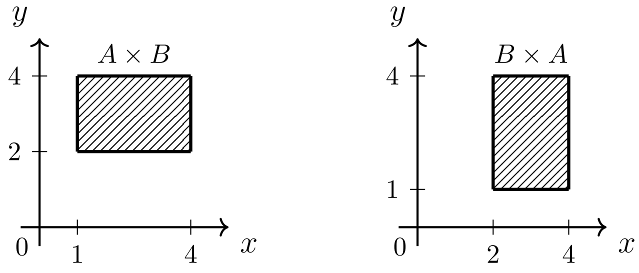
$\left\{\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right) \; ; \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)\right\}$



3. Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{2\}$, construa o gráfico cartesiano de $A \times B$.

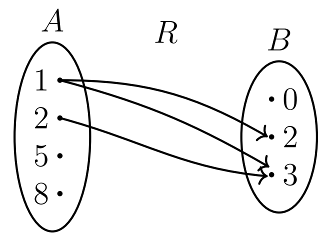


4. Dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq y \leq 4\}$, construa os gráficos cartesianos de $A \times B$ e $B \times A$.

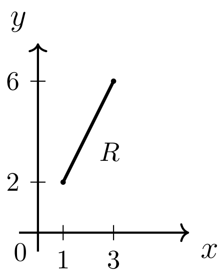


5. Se $A = \{1\,,\,2\,,\,5\,,\,8\}$ e $B = \{0\,,\,2\,,\,3\}$, quais são os elementos da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \,|\, x < y\}$? Construa o gráfico de flechas.

$R = \{(1, 2);\ (1, 3);\ (2, 3)\}$

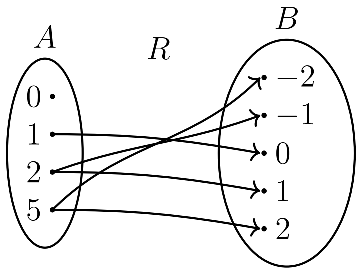


6. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \leq x \leq 3\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \,|\, 2 \leq y \leq 6\}$, construa o gráfico cartesiano da relação $R = \{(x, y) \in A \times B \,|\, y = 2x\}$.



7. Se $A = \{0\,,\,1\,,\,2\,,\,5\}$ e $B = \{-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\}$, quais os elementos de $R = \{(x, y) \in A \times B \,|\, y = \sqrt{x - 1}\}$?

$R = \{(1, 0);\ (2, -1);\ (2, 1);\ (5, -2);\ (5, 2)\}$



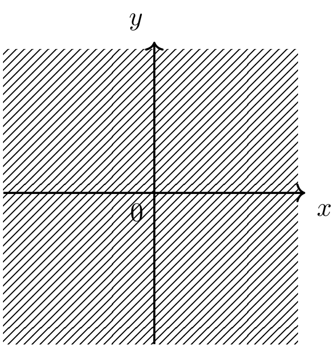
8. Represente num gráfico cartesiano:

a) $\mathbb{R}^2$ d) $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ g) $\{-2\} \times [0, 7[$

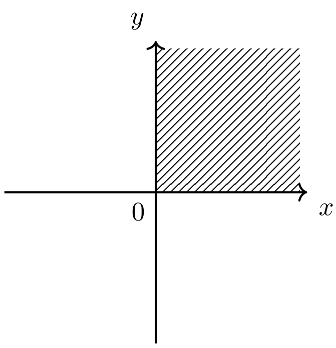
b) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ e) $[0, 2] \times [-1, 1[$ h) $\mathbb{Z}^2$

c) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$ f) $\mathbb{R} \times \{3\}$ i) $\mathbb{Z}_+ \times]-\infty, 0]$

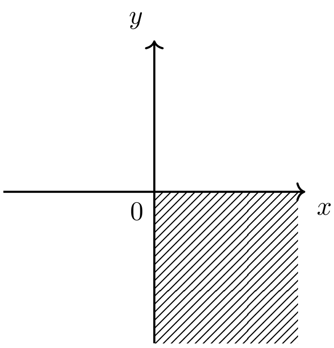
a) $\mathbb{R}^2$



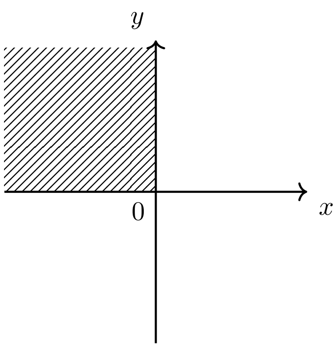
b) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$



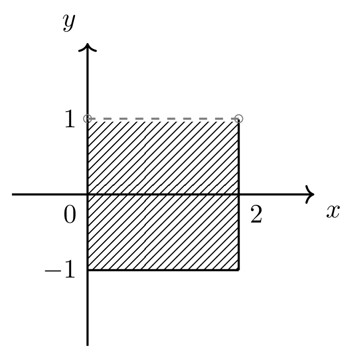
c) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$



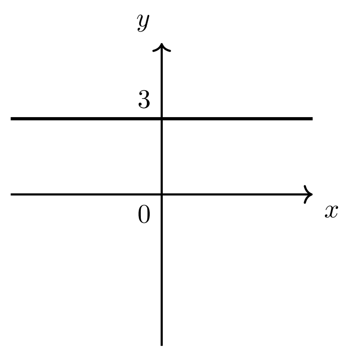
d) $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$



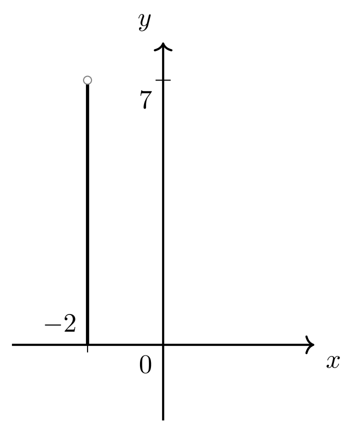
e) $[0, 2] \times [-1, 1[$



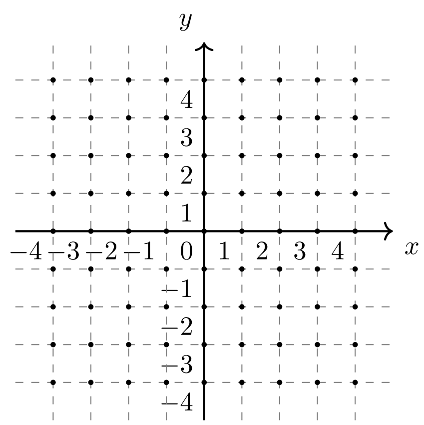
f) $\mathbb{R} \times \{3\}$



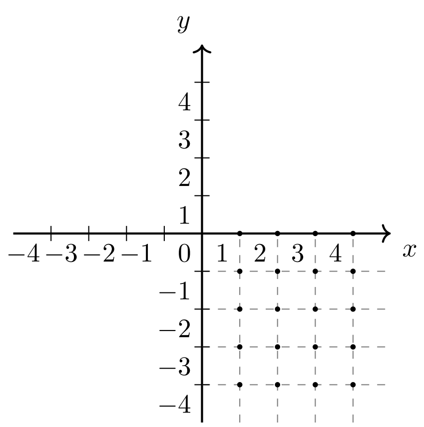
g) $\{-2\} \times [0, 7[$



h) $\mathbb{Z}^2$

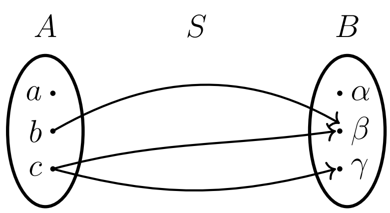


i) $\mathbb{Z}_+ \times]-\infty, 0]$

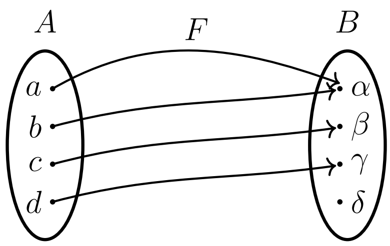


2.4 Funções

Conceito: Quando uma relação F do A em B é tal que cada elemento possui *uma e somente uma* imagem em B, dizemos que F é uma função de A em B.



S não é função



F é função

2.4.1 Notação

Exemplos:

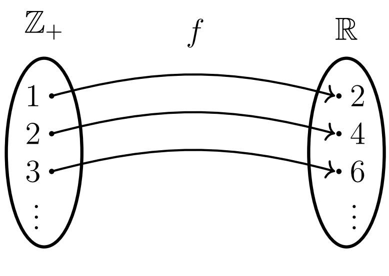
$$f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R};\ f(x) = 2x$$

Então

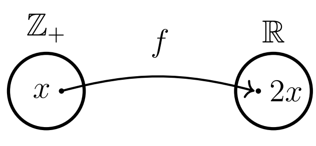
$$f(1) = 2,\ f(3) = 6,\ \ldots$$

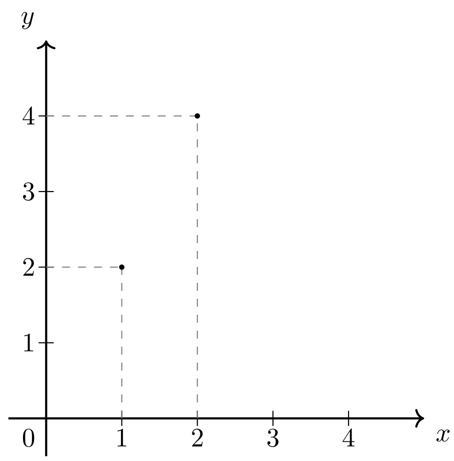
Notar:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R} \,|\, y = 2x\}$$



ou

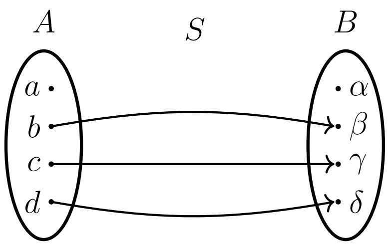




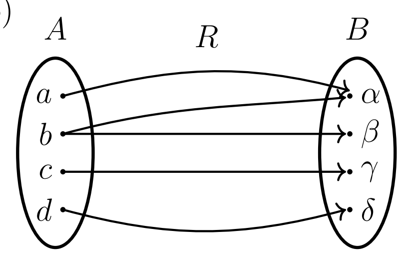
Exercício:

Quais das relações abaixo representa funções?

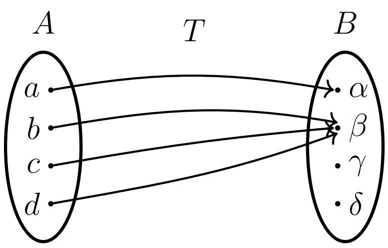
a)



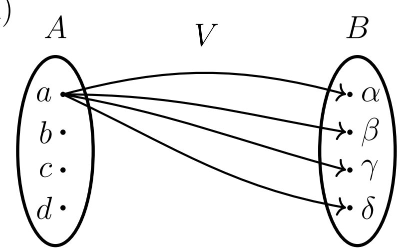
b)



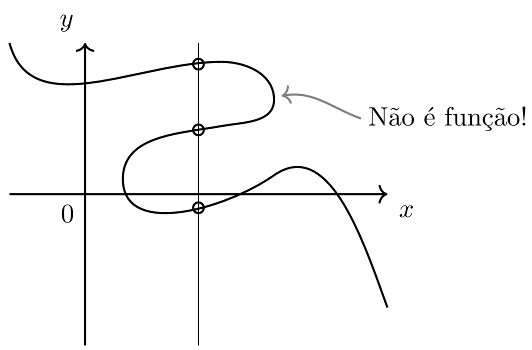
c)



d)



OBS: $(x, y) \in f$ e $(x_1, y_1) \in f \Longrightarrow x \neq x_1$ para ser função.



2.4.2 Domínio e Imagem

Mesma interpretação que nas Relações Binárias.

Exemplo:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$
$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

b) $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$
$\mathrm{D}_g = [1, 2] \qquad \mathrm{Im}(g) = [1, 2]$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$
$\mathrm{D}_h = \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(h) = [0, \infty[$

2.4.3 Classificação das Funções

Seja f uma função de A em B.

a) Sobrejetiva se $\mathrm{Im}(f) = B$

$$\text{Ex.: } \begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad f(x) = 2x + 1 \\ \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} \implies \text{Sobrejetiva} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g : [1, 2] \to \mathbb{R}\,, \quad g(x) = x \\ \mathrm{Im}(g) = [1, 2] \implies \text{Não é sobrejetiva} \end{cases}$$

b) Injetiva se e somente se:

$\forall (x_1, x_2, \ldots)$ com $x_1, x_2, \ldots \in A$; $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$

Ou seja, *elementos distintos* têm *imagens distintas*.

Ex.:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, f(x) = 2x+1$ É injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \implies 2x_1+1 \neq 2x_2+2$

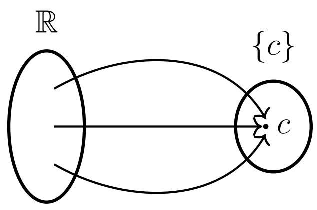
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, h(x) = x^2$ Não é injetiva, pois $x_1 \neq x_2 \;\not\Longrightarrow\; x_1^2 \neq x_2^2$, $(-1)^2 = 1^2$

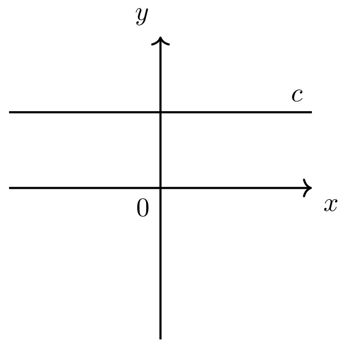
c) Uma função *sobrejetiva* e *injetiva* é chamada *bijetiva*. Então em *todo* elemento de B chega apenas uma flecha de f.

2.4.4 Funções Reais

Quando A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Função Constante

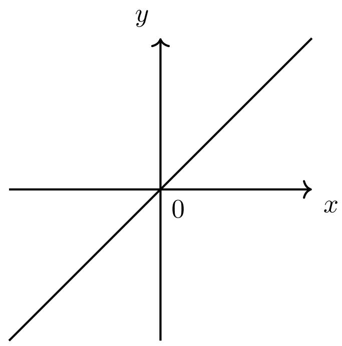




$$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Im}(f) = \{c\}$$

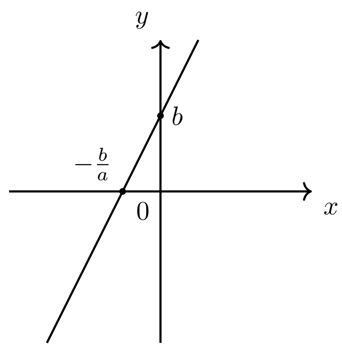
Função Idêntica

$$f(x) = x \quad \text{ou} \quad y = x$$
$$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$$



Função Binômio do 1º Grau

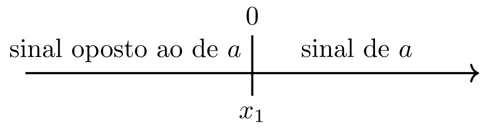
$$f(x) = ax + b\,,\, a \neq 0$$
$$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$$



Sinal da função binômio do 1º grau

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a\left[x - \left(\frac{-b}{a}\right)\right]$$

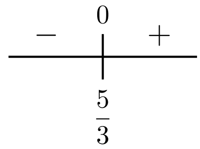
Raiz $x_1 = \dfrac{-b}{a}$



<u>Exemplos:</u>

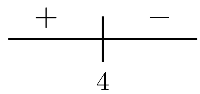
1. Estude a variação do sinal de $y = 3x - 5$.

   Raiz $x = \dfrac{5}{3}$



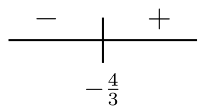
2. Estude a variação do sinal de $y = -x + 4$.

   Raiz $x = 4$



3. Resolva $3x + 4 > 0$.

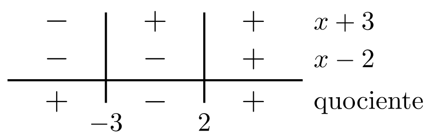
   $$\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -\frac{4}{3}\right\}$$



4. Resolva $\frac{x+3}{x-2} < 0$

   $x + 3 = 0 \implies x = -3$

   $x - 2 = 0 \implies x = 2$



   Resposta $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 < x < 2\}$

5. Resolva $\frac{1+x}{2-x} < \frac{1-x}{2+x}$.

$$\frac{1+x}{2-x} - \frac{1-x}{2+x} < 0$$

$$\frac{(1+x)(2+x) - (1-x)(2-x)}{(2-x)(2+x)} < 0$$

$$\frac{(2+x+2x+x^2)-(2-x-2x+x^2)}{(2-x)(2+x)} < 0$$

$$\frac{(2+3x+x^2)-(2-3x+x^2)}{(2-x)(2+x)} < 0$$

$$\frac{6x}{(2-x)(2+x)} < 0$$

$$\frac{x}{(2-x)(2+x)} < 0$$

$$\begin{array}{c|c|c|c l}
+ & + & + & - & x \\
+ & + & + & - & 2-x \\
- & + & + & + & 2+x \\
\hline
+ & - & + & - & \frac{x}{(2-x)(2+x)} \\
\multicolumn{1}{r}{-2} & \multicolumn{1}{r}{0} & \multicolumn{1}{r}{2} & &
\end{array}$$

Resposta: $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x > 2\}$.

Função Trinômio do 2º Grau

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right[$ quando $a > 0$

$\mathrm{Im}(f) = \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ quando $a < 0$

<u>OBS:</u> Equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

Soma

$$S = \frac{-b}{a}$$

Produto

$$P = \frac{c}{a}$$

Estudo do sinal de $y = ax^2 + bx + c$ (parábola)

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$\boxed{y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}} \;,\; \Delta = b^2 - 4ac$$

	x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
	$x + \frac{b}{2a}$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$a > 0,$	$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$a < 0,$	$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
$a > 0,$	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$
$a < 0,$	$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

CONCLUSÕES

1) Se $a > 0$, y decresce até $-\frac{\Delta}{4a}$ e a seguir cresce.

Mínimo $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \longleftarrow$ vértice

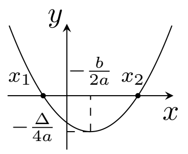
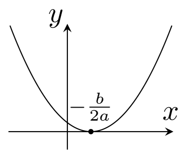
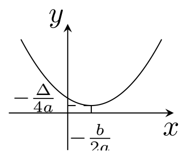
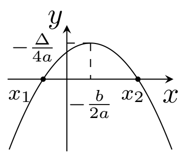
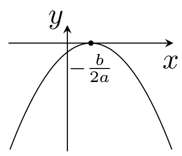
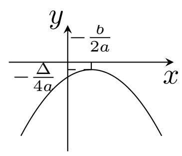
$\mathrm{Im}(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right[$

2) Se $a < 0$ a parábola tem máximo.

Máximo $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \longleftarrow$ vértice

$\text{Im}(f) = \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$

<u>Representação gráfica:</u>

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

<u>Exemplo:</u>

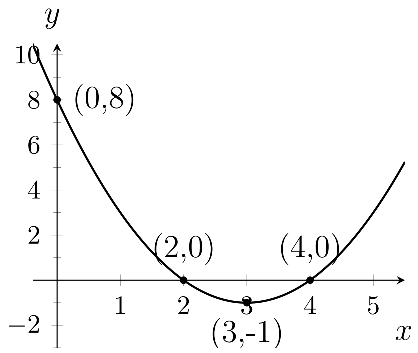
1. Faça o gráfico de $y = x^2 - 6x + 8$.

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \quad x_1 = 4 \\ \searrow \quad x_2 = 2 \end{array}$$

Mínimo:

$$x_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-6)}{2} = 3$$

$$y_m = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4}{4} = -1$$



2. Determine o máximo de $-x^2 + x + 1$.

$$y_M = -\frac{(1+4)}{-4} = -\frac{5}{-4} = \frac{5}{4}$$

Função Polinômio Racional Inteiro

<u>Polinômio</u> na variável real x, é toda expressão do tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ , onde:}$$

- a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0 são números reais, denominados coeficientes;
- n é um número inteiro positivo ou nulo;
- o grau da expressão é definido pelo maior expoente de x cujo coeficiente não seja nulo.

Função polinomial de grau n, para todo x real, é definida como:

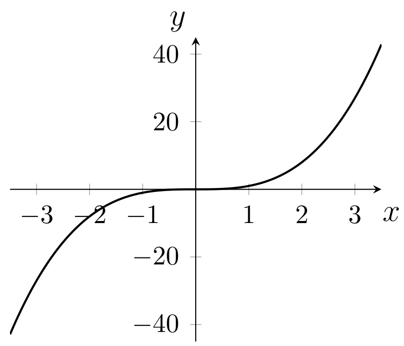
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

considerando as definições acima.

Domínio: $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

Imagem: $\mathrm{Im}(f)$ depende de n e de a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0.

Exemplo: $f(x) = x^3$



n par, o gráfico é do tipo da parábola

$\boxed{f(x) = x^n}$ $\nearrow$ $\searrow$

n ímpar, o gráfico é do tipo x^3

Abaixo destacamos algumas propriedades de polinômios de interesse para o presente texto.

Divisão de polinômios:

Considere dois polinômios $p(x)$ e $h(x)$, com $h(x)$ não nulo. Dividir $p(x)$ por $h(x)$ significa encontrar dois polinômios $q(x)$ e $r(x)$, que satisfaçam às seguintes condições:

- $p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$; onde $p(x)$ é o dividendo, $h(x)$ é o divisor, $q(x)$ é o quociente e $r(x)$ o resto.
- O grau de $r(x)$ não pode ser igual nem superior ao grau de $h(x)$ ou então $r(x) = 0$.

Dispositivo prático de Briot-Ruffini

Seja dividir um polinômio $p(x)$ por $h(x) = x - c$. Como indicado acima, podemos escrever

$$p(x) = (x - c)\, q(x) + r\,, \tag{$*$}$$

onde

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0\,, \text{ e}$$

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-3}x^{n-3} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0\,.$$

Desenvolvendo o segundo membro da igualdade ($*$), fica:

$$\begin{aligned}(x - c)\, q(x) = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - c\, b_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - c\, b_{n-2})x^{n-2} + \ldots \\ +(b_1 - c\, b_2)x^2 + (b_0 - c\, b_1)x - c\, b_0 + r\,.\end{aligned}$$

Igualando a expressão acima a $p(x)$, teremos:

$$\begin{aligned}a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - c\, b_{n-1})x^{n-1} \\ +(b_{n-3} - c\, b_{n-2})x^{n-2} + \ldots + (b_1 - c\, b_2)x^2 + (b_0 - c\, b_1)x + r - c\, b_0\end{aligned}$$

Donde se conclui que:

$b_{n-1} = a_n$

$b_{n-2} - c\, b_{n-1} = a_{n-1} \implies b_{n-2} = a_{n-1} + c\, b_{n-1}$

$b_{n-3} - c\, b_{n-2} = a_{n-2} \implies b_{n-3} = a_{n-2} + c\, b_{n-2}$

$\vdots$

$b_0 - c\, b_1 = a_1 \implies b_0 = a_1 + c\, b_1$

$r - c\, b_0 = a_0 \implies r = a_0 + c\, b_0$

Exemplo: Use o método de Briot-Ruffini para efetuar a divisão de $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2$ por $h(x) = x - 2$.

Termo constante do divisor com sinal trocado 2	coeficientes de x do dividendo $p(x)$ 3 -5 1	Termo constante do dividendo $p(x)$ -2
	coeficientes do quociente 3 $2\times 3-5=1$ $2\times 1+1=3$	resto $2\times 3-2=4$

Verificamos que $q(x) = 3x^2 + x + 3$; $r(x) = 4$.

Teorema de D'Alambert

O teorema de D'Alambert afirma que o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x - c)$ é $p(c)$.

Demonstração. A divisão de $p(x)$ por $x - c$, resulta num quociente $q(x)$ e em um resto $r(x)$. Portanto podemos escrever:

$p(x) = (x - c)\,q(x) + r(x)$

Fazendo $x = c$, vem:

$p(c) = (c - c)\,q(c) + r = 0 \times q(c) + r \quad \Longrightarrow \quad r = p(c)$

Exemplo: Pela divisão sintética (dispositivo de Briot-Ruffini), ache o quociente e o resto da divisão de $-x^4 + 7x^3 - 4x^2$ por $x - 3$.

Solução:

3	-1	7	-4	0	0
	-1	$3\times(-1)+7=4$	$3\times 4-4=8$	$3\times 8=24$	$3\times 24=72$

Quociente: $q(x) = -x^3 + 4x^2 + 8x + 24$;

Resto: $r(x) = 72$

Teorema do Fator

Se c é uma raiz de um polinômio $p(x)$, de grau $n > 0$, então $x - c$ é um fator de $p(x)$.

Demonstração. Pelo teorema de D'Alambert, a divisão de $p(x)$ por $x - c$ resulta um quociente $q(x)$ e um resto $p(c)$, tal que:

$p(x) = (x - c)\,q(x) + p(c)$; se c é uma raiz de $p(x)$, então, $p(c) = 0$ e teremos:

$p(x) = (x - c)\,q(x)$

Portanto, $x - c$ é um fator de $p(x)$.

Como consequência, podemos afirmar que $p(x)$ é divisível por $(x-a)$ e por $(x-b)$, com $a \neq b$, se, e somente se, $p(x)$ for divisível por $(x-a)(x-b)$.

Equações polinomiais

Denomina-se equação polinomial ou algébrica, toda equação que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Relações de Girard

Seja a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Sejam x_1 e x_2, suas raízes.

Decompondo o primeiro membro em fatores do primeiro grau, fica:

$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2) = a\big[x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2\big]$

Dividindo o primeiro e o último membros por a, fica:

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2$

Considerando a igualdade entre o polinômio do primeiro membro da igualdade e o do segundo, temos:

$-(x_1+x_2) = \frac{b}{a} \implies x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1x_2 = \frac{c}{a}$

As relações acima são denominadas, “relações entre coeficientes e raízes da equação algébrica do segundo grau”.

Para uma equação algébrica do terceiro grau, por decomposição de fatores, tendo com raízes x_1, x_2, x_3, teremos:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

$= a\big[x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3\big]$

Dividindo o primeiro e o último termos da equação acima por a, fica:

$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3$

Considerando a igualdade entre o polinômio do primeiro membro da igualdade e o do segundo, temos:

$-(x_1+x_2+x_3) = \frac{b}{a} \implies x_1+x_2+x_3 = -\frac{b}{a}$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}$

$x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}$

Para uma equação algébrica do quarto grau, por decomposição de fatores, tendo com raízes x_1, x_2, x_3, x_4, teremos:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

$= a\big[x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)x^2$
$+(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4\big]$

Seguindo o procedimento usado nas equações anteriores, teremos:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}$

$x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}$

Portanto, generalizando, podemos escrever para a equação algébrica de grau n, $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com raízes x_1, x_2, x_3, ..., x_n, as seguintes relações:

- Soma de raízes:
  $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- Soma dos produtos das raízes, tomadas duas a duas:
  $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$
- Soma dos produtos das raízes, tomadas três a três:
  $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$
- Produto de n raízes:
  $x_1x_2x_3 \cdot \ldots \cdot = (-1)^n\, \dfrac{a_0}{a_n}$

Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros

Se o número racional $\frac{p}{q}$, com p e q primos entre si, é raiz de uma equação algébrica de coeficientes inteiros $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n.

Exercícios:

1) Dividir $5x^5 - 7x^3 + 6x^2 - 2x + 4$ por $x - 1$.

   Solução:

1	5	0	-7	6	-2	4
	5	5	-2	4	2	6

   $q(x) = 5x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 4x + 2$

   $r(x) = 6$

2) Sem executar a divisão, mostrar que $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2$ é divisível por $x + 2$

   Solução:

   $f(-2) = 2^4 - 3 \times 2^3 + 3 \times 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 16 - 24 + 12 - 6 + 2 = 0$

3) Solicitação semelhante à do item anterior, para $f(x) = 2x^4 - 7x^3 - 2x^2 + 13x + 6$, em relação a $x^2 - 5x + 6$.

   Solução:

   $$x^2 - 5x + 6 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \;\rightarrow\; x_1 = 3\,;\, x_2 = 2$$

   $\rightarrow\; x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

   $\rightarrow\; f(2) = 2 \times 2^4 - 7 \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 13 \times 2 + 6 = 0;$

   $f(3) = 2 \times 3^4 - 7 \times 3^3 - 2 \times 3^2 + 13 \times 3 + 6 = 0$

Função Racional

$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são polinômios racionais.

$\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, Q(x) \neq 0\}$

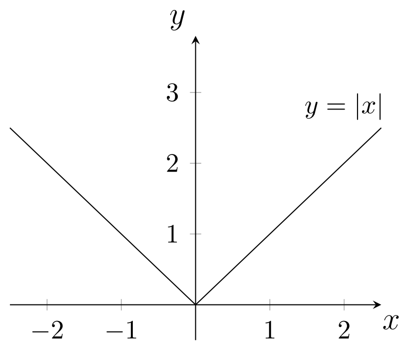
Exemplo: $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

$\mathrm{D}_f =]-\infty, 2[\,\cup\,]2, 3[\,\cup\,]3, +\infty[$

Função Módulo

$f(x) = |x|$
$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$



Operações com Funções

Sejam $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : E \to \mathbb{R}$ onde $E \subset \mathbb{R}$.

I) A *soma* de f com g.

$$f + g : E \to \mathbb{R},\ (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

II) *Produto* de f por g.

$$f \cdot g : E \to \mathbb{R},\ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

III) *Diferença* de f e g.

$$f - g : E \to \mathbb{R},\ (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

IV) Sendo $g(x) \neq 0$ para todo $x \in E$. *Quociente* de f por g.

$$\frac{f}{g} : E \to \mathbb{R},\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

V) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ o produto de λ por f

$$f : E \to \mathbb{R},\ (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

<u>OBS:</u> Funções iguais: $f(x) = g(x)$, $\forall x \ x \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_g$

<u>Exemplos:</u>

1) $f(x) = +\sqrt{x^4}$ e $g(x) = x^2$ são iguais.

2) $f(x) = x - 1$ e $g(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ não são iguais pois $\mathrm{D}_f \neq \mathrm{D}_g$.

3) $f(x) = x$ e $g(x) = \frac{x^2}{x}$ $\mathrm{D}_f \neq \mathrm{D}_g$.

4) Qual o domínio da função real f definida por $f(x) = g(x) + h(x)$ onde $g(x) = \sqrt{x+7}$ e $h(x) = \sqrt{1-x}$?

   $\mathrm{D}_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x + 7 \geq 0\} \longrightarrow x \geq -7$

   $\mathrm{D}_h = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 - x \geq 0\} \longrightarrow x \leq 1$

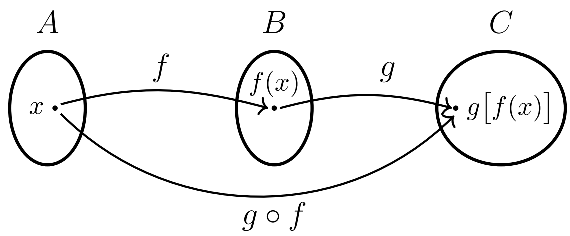
   $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}_g \cap \mathrm{D}_h$

   $\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -7 \leq x \leq 1\}$

Composição de Funções

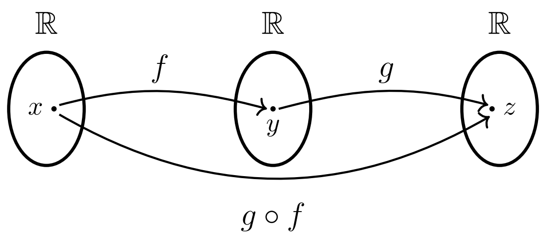
Seja $f : A \to B$ e $g : B \to C$

$g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$



<u>Exemplo:</u> Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5 - 3x$

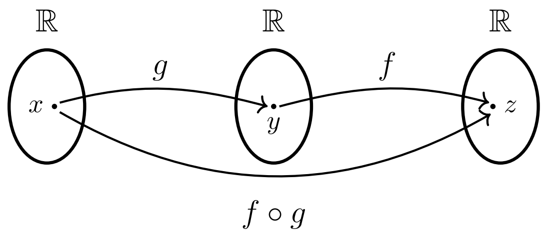
a) $y = f(x)$, $z = g(y) = g\big[f(x)\big]$



$g(x) = 5 - 3x$, $g\big[f(x)\big] = 5 - 3 \cdot f(x) = 5 - 3(2x-1) = 8 - 6x$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = 8 - 6x$

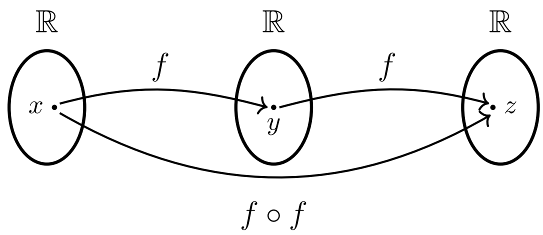
b) $y = g(x)$, $z = f(y) = f\big[g(x)\big]$



$f(x) = 2x - 1$, $f\big[g(x)\big] = 2 \cdot g(x) - 1 = 2(5 - 3x) - 1 = 9 - 6x$

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = 9 - 6x$

c) $y = f(x)$, $z = f(y) = f\big[f(x)\big]$



$f(x) = 2x - 1$, $f\big[f(x)\big] = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$

$f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ f)(x) = 4x - 3$

OBSERVAÇÕES:

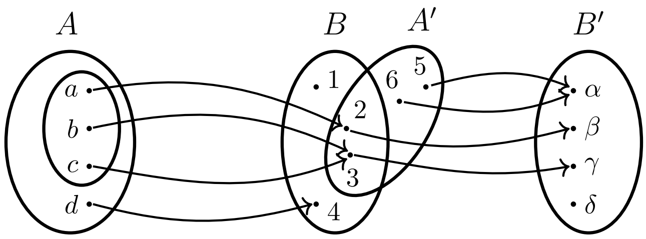
I) Em geral $g \circ f$ é a função cujo domínio

$\mathrm{D}_{g \circ f} = \{x \mid x \in \mathrm{D}_f \text{ e } f(x) \in \mathrm{D}_g\}$

$(g \circ f)(x) = g\big[f(x)\big]$, $\forall x$, $x \in \mathrm{D}_f$

Exemplos:

1) $f : A \to B$ e $g : A' \to B'$



$A' \cap \mathrm{Im}(f) \neq \emptyset \qquad \mathrm{D}_{g \circ f} = \{a, b, c\}$

2) Seja f a função real definida por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{2\} \qquad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$

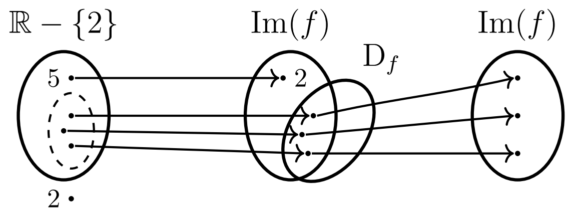
$\mathrm{D}_{f \circ f} = \mathbb{R} - \{2, 5\}$ pois

$\mathrm{D}_{f \circ f} = \{x \,|\, x \in \mathrm{D}_f \text{ e } f(x) \in \mathrm{D}_f\}$

Quais $x \in \mathrm{D}_f$ e tais que $f(x) \notin \mathrm{D}_f$?

Apenas x tal que $f(x) = 2$

$$2 = \frac{x+1}{x-2} \longrightarrow x = 5$$



II) $f \circ g \neq g \circ f$

III) Composição é associativa

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$

$(h \circ g \circ f)(x) = h\{g[f(x)]\}$

Funções Inversas

O mesmo conceito que nas relações binárias. Contudo sendo $f : A \to B$ nem sempre f^{-1} é função de B em A.

Exemplo: $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[\,,\ f(x) = x^2$

A relação inversa $f^{-1} = \{(x, y) \in [0, +\infty[\, \times \mathbb{R} \,|\, x = y^2\}$ *não é função.*

A condição necessária e suficiente para que f admita inversa f^{-1} é que f seja uma **bijeção**.

<u>Exemplo:</u>

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$

   f é bijetiva portanto admite inversa.

   <u>Determinação de f^{-1}:</u>

   $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 3x - 1\}$

   $f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 3y - 1\}$

   Mas isolando y fica: $y = \frac{x+1}{3}$

   $\implies f^{-1} = \frac{x+1}{3}$

2) $f(x) = |x|$ não admite inversa pois *não é* bijetiva.

3) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $\quad \mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

   $x_1, x_2 \in \mathrm{D}_f$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$ injetiva logo admite inversa.

   <u>**OBS:**</u> Como funções reais por convenção são *sobrejetivas*, basta ver se são *injetivas*.

   <u>Determinação de f^{-1}:</u>

   $f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} - \{-1\} \times \mathbb{R} - \{0\} \,\middle|\, y = \frac{1}{x+1}\right\}$

   $f^{-1} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} - \{-1\} \,\middle|\, x = \frac{1}{y+1}\right\}$

   $x = \frac{1}{y+1} \implies xy + x = 1 \implies y = \frac{1-x}{x}$

   $f^{-1} = \frac{1-x}{x}$

   <u>**OBS:**</u>

   a) $\mathrm{D}_f = \mathrm{Im}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{-1\}$ e $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{D}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{0\}$

   b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ e $f\big(f^{-1}(x)\big) = \frac{1}{f^{-1}(x)+1} = \frac{1}{\frac{1-x}{x}+1} = \frac{x}{1-x+x} = x$

   $f^{-1}\big(f(x)\big) = \frac{1-f(x)}{f(x)} = \frac{1-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{x+1-1}{1} = x$

   $\implies \boxed{f\big(f^{-1}(x)\big) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x}$

Função Par e Função Ímpar

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Se } f(x) = f(-x) & \text{PAR} \\ \text{Se } f(x) = -f(-x) & \text{ÍMPAR} \end{array}\right\} \forall x \in \mathrm{D}_f$$

Exemplos:

1) $f(x) = |x|$ é par, pois $|x| = |-x|$

2) $f(x) = x^3$ é ímpar, pois $f(x) = x^3$, $f(-x) = -x^3$

Funções Monótonas

1) Estritamente crescente

   Se $x_1 \in \mathrm{D}_f$, $x_2 \in \mathrm{D}_f$ e $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$

2) Estritamente decrescente

   Se $x_1 \in \mathrm{D}_f$, $x_2 \in \mathrm{D}_f$ e $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$

3) Estritamente monótona se f é estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Exemplos:

1. $f(x) = 2x + 1$ é estritamente crescente.
2. $g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$ é estritamente crescente.
3. $h : \mathbb{R}^*_+ \to$, $h(x) = \frac{1}{x}$ é estritamente decrescente.
4. $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $r(x) = x^2$ é estritamente crescente.

Teorema 2.4.1. *Se f é estritamente monótona, então f é injetiva.*

Teorema 2.4.2. *Seja g a inversa de f.*

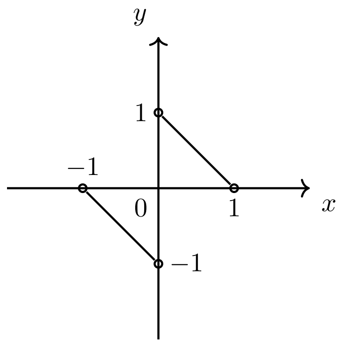
I) f é estritamente crescente se e só se g é estritamente crescente.

II) f é estritamente decrescente se e só se g é estritamente decrescente.

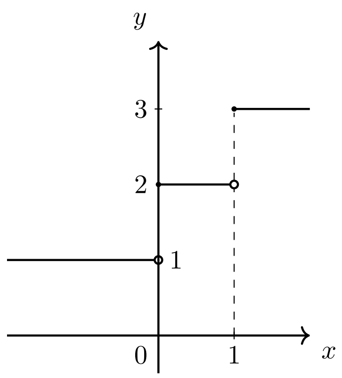
Funções Definidas Arbitrariamente

Exemplos:

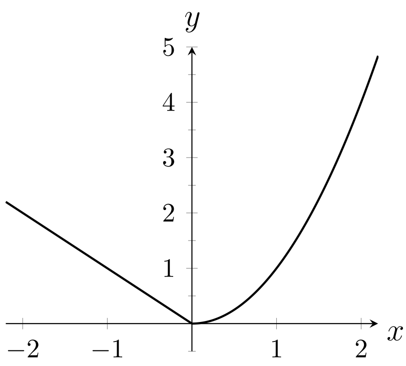
1) $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x \in]-1,0[\\ -x+1, & x \in]0,1[\\ 0, & x = 0 \end{cases}$



2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$



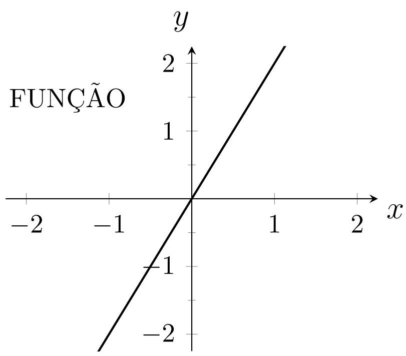
3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

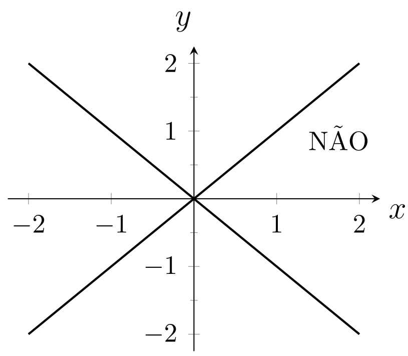


2.5 Exercícios

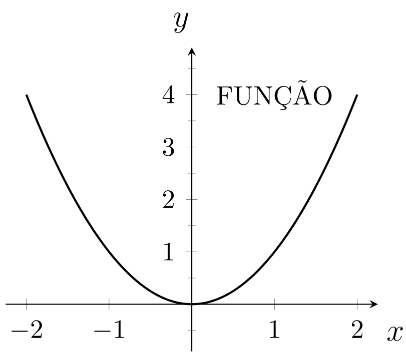
1. Faça o gráfico cartesiano das relações abaixo e diga quais são as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

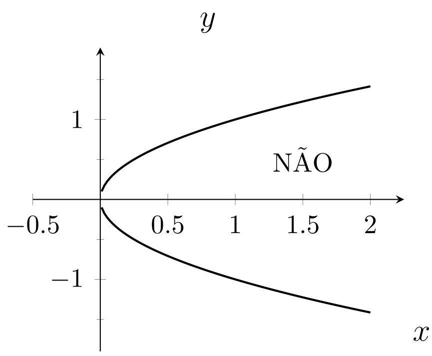
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$ $\quad$ $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^2\}$



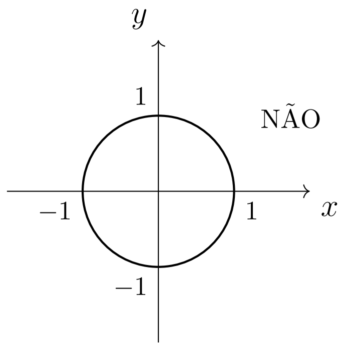


$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ $\quad$ $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$

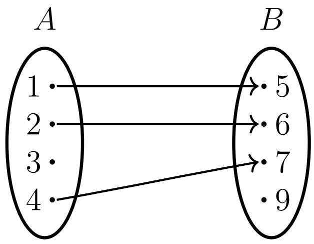




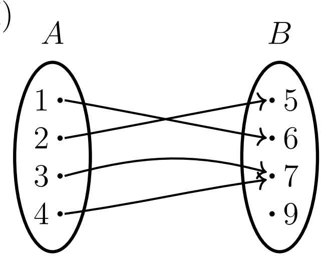
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$



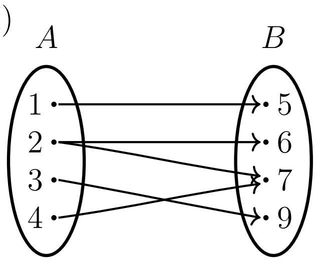
2. Diga se cada um dos esquemas define ou não uma função de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{5, 6, 7, 9\}$.

I)


FUNÇÃO

II)


FUNÇÃO

III)


NÃO

3. Classifique as funções abaixo (injetiva, sobrejetiva e bijetiva).

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$	bijetiva
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 5$	bijetiva
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ h(x) = x^2$	sobrejetiva
$j : \mathbb{R}_+ \to [0, +\infty[\ ,\ j(x) = x^2$	bijetiva
$k : [0, +\infty[\to [0, +\infty[\ ,\ k(x) = x^2$	bijetiva
$m :]-\infty, 0] \to [0, +\infty[\ ,\ m(x) = x^2$	bijetiva
$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ p(x) = \lvert x \rvert$	sobrejetiva
$q : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\},\ q(x) = \frac{1}{x}$	bijetiva

4. Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Sejam f, g e h funções de A em A.

   $f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(3) = 5,\ f(4) = 5$
   $g(1) = 1,\ g(2) = 5,\ g(3) = 5,\ g(4) = 1$
   $h(1) = 7,\ h(2) = 1,\ h(3) = 5,\ h(4) = 7$

   Qual das funções é injetora?

5. Sendo $f : [-3, 4] \to B,\ f(x) = x^2$, uma função sobrejetora, especifique B.

   $$\begin{array}{l} f(-3) = 9 \\ f(4) = 16 \end{array} \implies B = [9, 16]$$

6. Classifique em par ou ímpar as seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

   a) $y = 2x$

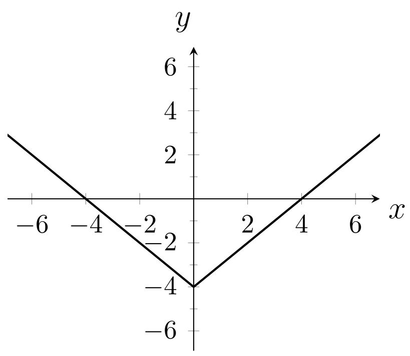
   $$\begin{array}{l} f(-x) = -2x \\ f(x) = 2x = -f(x) \end{array} \longrightarrow \text{ÍMPAR}$$

   b) $y = x^2 - 4$

   $$f(x) = f(-x) \longrightarrow \text{PAR}$$

   c) $y = |x| - 4$

   $$f(x) = \begin{cases} x - 4, & x \geq 0 \\ -x - 4, & x < 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = f(-x) \text{ PAR}$$



d) $y = 3 \longrightarrow$ PAR

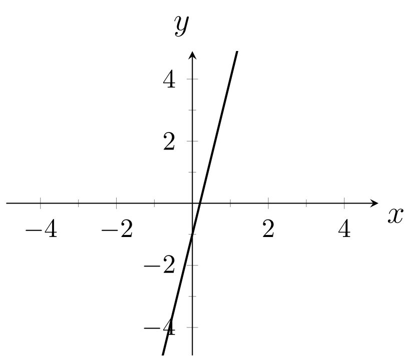
e) $y = x^7$

$f(x) = -f(-x) \longrightarrow$ ÍMPAR

7. Verifique se são *pares* ou *ímpares* as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidos por:

a) $f(x) = x^2$ PAR

b) $f(x) = 5x - 1$ Ñ PAR; Ñ ÍMPAR



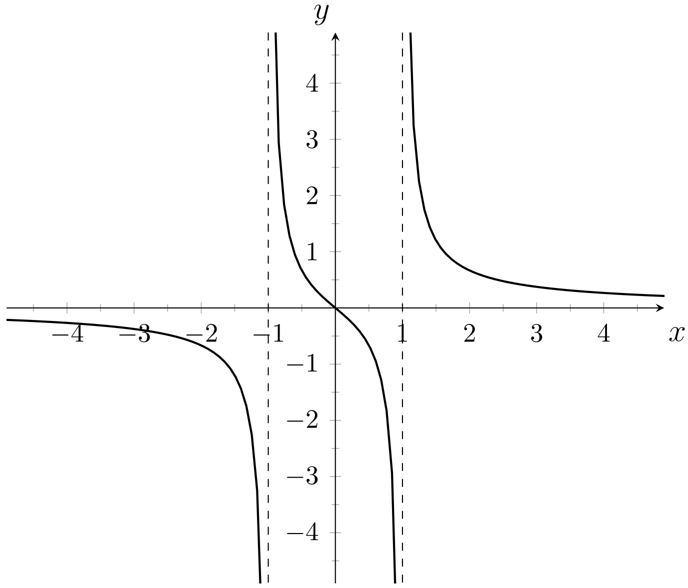
c) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ (3 funções pares)

$f(x) = f(-x)$ PAR

d) $f(x) = |x|$ PAR

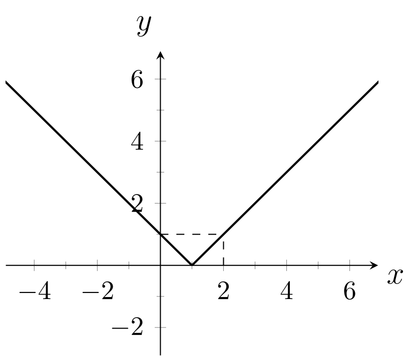
e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ ÍMPAR

		-1		0		$+1$	
x	$-$		$-$	$\circ$	$+$		$+$
$x+1$	$-$	$\circ$	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	$\circ$	$+$
$\dfrac{x}{x^2-1}$	$-$		$+$		$-$		$+$
		$-\infty$ $+\infty$				$-\infty$ $+\infty$	



f) $f(x) = |x-1|$

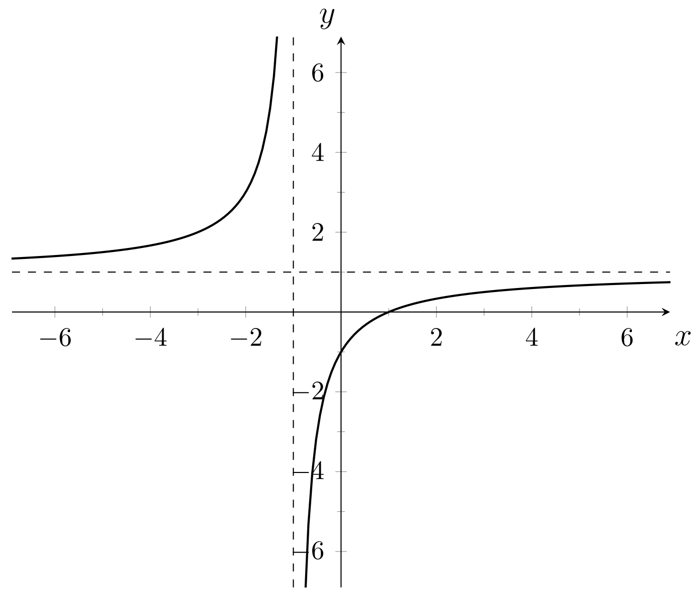
$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{para} \quad x \geq 1 \\ -x+1, & \quad\quad\quad x < 1 \end{cases} \qquad \text{Ñ PAR, Ñ ÍMPAR}$$



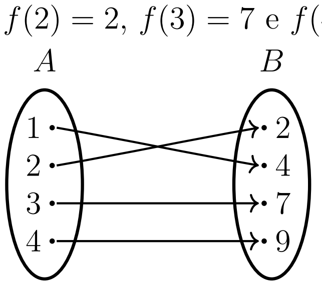
g) $f(x) = x^5 + 4x^3 - 2x$ ÍMPAR (Três funções ímpares)

h) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ Ñ PAR, Ñ ÍMPAR

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	$\circ$	$+$	
$x+1$		$-$	$\circ$	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$		$-$		$+$	
	1^+	$+\infty$		$-\infty$			1^-



8. Seja f uma aplicação de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{2, 4, 7, 9\}$ definida por $f(1) = 4$, $f(2) = 2$, $f(3) = 7$ e $f(4) = 9$. Construa f^{-1}.



$f^{-1}(2) = 2$, $f^{-1}(4) = 1$,
$f^{-1}(7) = 3$, $f^{-1}(9) = 4$

9. Determine o domínio convencional das funções reais definidas abaixo por $f(x)$ igual a:

a) $|x-3|$ $\qquad$ $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

b) $x^3 - \frac{x^2}{2} + 1$ $\qquad$ $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

c) $\frac{1}{x}$ $\qquad$ $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$

d) $\frac{x^2-3}{x^2-9} = \frac{x^2-3}{(x+3)(x-3)}$ $\qquad$ $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

e) $\frac{x}{x^2+1}$ $\qquad$ $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

f) $\frac{x}{x^2-7x+12}$

$x^2 - 7x + 12 \neq 0$

$x \neq \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{2}$

$$x \neq \frac{7\pm1}{2} \begin{array}{l} \nearrow 4 \\ \searrow 3 \end{array}$$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{3, 4\}$

g) $\sqrt{2x+3}$

$2x + 3 \geq 0$ $\qquad$ $\mathrm{D}_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq -\frac{3}{2}\right\}$

h) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

$x + 1 > 0$ $\qquad$ $\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -1\}$

i) $\sqrt{4-x^2}$

$4 - x^2 \geq 0$ $\qquad$ $\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 2\}$

j) $\sqrt{x^2-5x+6}$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$

$$x = \frac{5\pm1}{2} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow 2 \end{array}$$

$\mathrm{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$

k) $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

$x^2 + x + 1 \geq 0$

$\Delta < 0$

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$

2.6 Função Exponencial e Logaritmo

2.6.1 Preliminares

Propriedades da potenciação

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$ sendo $a \neq 0$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ sendo $b \neq 0$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Radicais

$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

Quando $a \in \mathbb{R}_-$ e n é par, não existe raiz em $\mathbb{R}$.

Quando $a \in \mathbb{R}_-$ e n é ímpar, a raiz é um número negativo.

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ sendo $a > 0$

Propriedades: sendo $a \geq 0$ e $b \geq 0$, temos:

$\sqrt[n]{a^n} = a$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ sendo $b \neq 0$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ sendo $p \neq 0$

$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \div p]{a^{m \div p}}$ sendo $p \neq 0$

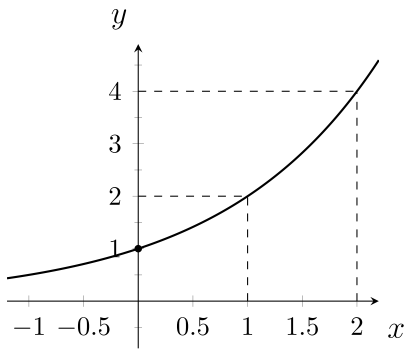
2.6.2 Função exponencial

Toda função do tipo $\boxed{f(x) = a^x}$ definida para todo x real com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Gráfico:

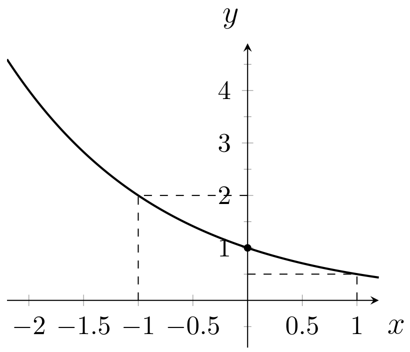
$\boxed{a > 1}$

$y = 2^x$



$\boxed{0 < a < 1}$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



<u>OBS:</u> A curva passa por $(0, 1)$.

$\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\,; \quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*_+$

$a > 1 \implies$ Função crescente

$0 < a < 1 \implies$ Função decrescente

Equações exponenciais:

Quando apresenta incógnita no expoente.

1) $2^x = 8 \implies 2^x = 2^3 \implies \boxed{x = 3}$

2) $3^{x+1} + 3^{x+2} = 12 \implies 3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x = 12 \implies 3^x(3 + 9) = 12$
$\implies 3^x = 1 \implies \boxed{x = 0}$

3) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

Fazer $2^x = y$

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \implies y = \begin{cases} 2 & 2^x = 2 \implies \boxed{x = 1} \\ 1 & 2^x = 1 \implies \boxed{x = 0} \end{cases}$$

Inequações exponenciais:

São inequações que envolva funções exponenciais.

$\boxed{a > 1}$

$2^x > 8 \implies 2^x > 2^3 \implies \boxed{x > 3}$

$\boxed{0 < a < 1}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^4 \implies \boxed{x < 4}$$

Exercícios:

1) Resolva as equações exponenciais:

a) $7^{x-1} + 7^{x+1} = 50$

$$\frac{7^x}{7} + 7 \cdot 7^x = 50$$

$$7^x \left(\frac{1}{7} + 7\right) = 50$$

$$7^x \left(\frac{50}{7}\right) = 50$$

$$7^x = 7$$

$$\boxed{x = 1}$$

b) $2^{x+3} = 2^{x-2} + 62$

$$8 \cdot 2^x - \frac{2^x}{4} = 62$$

$$2^x \left(8 - \frac{1}{4}\right) = 62$$

$2^x\left(\dfrac{31}{4}\right) = 62$

$2^x = 8$

$\boxed{x = 3}$

c) $4^x + 16 = 17 \cdot 2^x$

$\boxed{2^x = y}$

$y^2 + 16 = 17y$

$y^2 - 17y + 16 = 0$

$y = \dfrac{17 \pm \sqrt{225}}{2}$

$$y = \begin{cases} \nearrow \; 16 & 2^x = 16 \implies \boxed{x = 4} \\ & \text{ou} \\ \searrow \; 1 & 2^x = 1 \implies \boxed{x = 0} \end{cases}$$

d) $49^x - 7 \cdot 7^x = 0$

$\boxed{7^x = y}$

$y^2 - 7y = 0$

$y(y - 7) = 0$

$y = 0$ ou $y = 7$

$7^x = 0$ $\quad$ $7^x = 7$

$\cancel{x =}$ $\quad$ $\boxed{x = 1}$

2) Resolva as inequações exponenciais:

a) $49^{x+1} \leq 343$

$49 \cdot 49^x \leq 343$

$49^x \leq 7$

$7^{2x} \leq 7$

$2x \leq 1$

$\boxed{x \leq \dfrac{1}{2}}$

b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x+3} < \dfrac{1}{25}$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{3} \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^{x} < \dfrac{1}{25}$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x} < \dfrac{1}{25}\dfrac{25 \cdot 5}{1}$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x} < 5$

$5^{-x} < 5$

$-x < 1$

$\boxed{x > -1}$

2.6.3 Logaritmos

Consideremos dois n^{os} reais a e b com $a \neq 1$. Se $a^c = b$ então

$$\boxed{c = \log_a b}$$

$$\boxed{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$$

sendo $\begin{cases} 0 < a \quad \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$ condição de existência do logaritmo.

Propriedades operatórias dos logaritmos:

1) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

2) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

3) $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Mudança de base:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$a^y = b$

$\log_c(a^y) = \log_c b$

$y \log_c a = \log_c b$

<u>Exemplo:</u>

1) Sendo $y = \log_3 10$, mudar para a base 10.

   $y = \dfrac{\log_{10} 10}{\log_{10} 3} = \dfrac{1}{\log_{10} 3}$

2) Escrever na base 10 $\log_{100} 3$.

   $\log_{100} 3 = \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 100} = \dfrac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 10} = \dfrac{\log_{10} 3}{2}$

Equações logarítmicas:

1) $\log_5 \big(\log_2 x\big) = 0$

   $\log_2 x = 5^0$

   $\log_2 x = 1$

   $x = 2^1$

   $\boxed{x = 2}$

2) $\log_x(x+6) = 2$

   $x^2 = x + 6$

   $x^2 - x - 6 = 0$

   $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

   $x = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$ Solução $= \{3\}$

3) $\log_3(x+7) + \log_3(x-1) = 2$

   $\log_3(x+7)(x-1) = 2$

   $(x+7)(x-1) = 9$

   $x^2 - x + 7x - 7 - 9 = 0$

   $x^2 + 6x - 16 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \cancel{-8} \\ \searrow 2 \end{array} \qquad \text{Solução} = \{2\}$$

4) $\log_4 x + \log_2 x = 6$

Passar para base 2: $\log_4 x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 x}{2}$

$$\frac{\log_2 x}{2} + \log_2 x = 6 \qquad \log_2 x = n$$

$$\frac{n}{2} + n = 6$$

$$\frac{n+2n}{2} = 6$$

$$\boxed{n = 4}$$

$$\log_2 x = 4$$

$$x = 2^4 = 16 \qquad \text{Solução} = \{16\}$$

Exercício:

1) Determine o conjunto solução das equações:

a) $\log_3 x + \log_9 x = 3$ $\qquad \log_9 x = \dfrac{\log_3 x}{\log_3 9} = \dfrac{\log_3 x}{2}$

$$\log_3 x + \frac{\log_3 x}{2} = 3 \qquad \log_3 x = n$$

$$\frac{2n+n}{2} = 3$$

$$3n = 6$$

$$\log_3 x = 2$$

$$x = 9$$

b) $\log_5 x + \log_{25} x = 6$

$$\log_5 x + \frac{\log_5 x}{2} = 6$$

$$\frac{2n+n}{2} = 6$$

$$3n = 12$$

$n = 4$

$\log_5 x = 4$

$x = 5^4 = 625$

c) $\log_2 x - \log_{16} x = 3$ $\qquad \log_{16} x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 16} = \dfrac{\log_2 x}{4}$

$\log_2 x - \dfrac{\log_2 x}{4} = 3$

$\dfrac{4n - n}{4} = 3$

$3n = 12$

$n = 4$

$\log_2 x = 4$

$x = 2^4 = 16$ Solução $= \{16\}$

d) $\log_2(x+1) + \log_4(x+1) = \dfrac{9}{2}$

$\log_2(x+1) + \dfrac{\log_2(x+1)}{2} = \dfrac{9}{2}$

$\boxed{\log_2(x+1) = n}$

$\dfrac{2n + n}{2} = \dfrac{9}{2}$

$3n = 9 \implies n = 3$

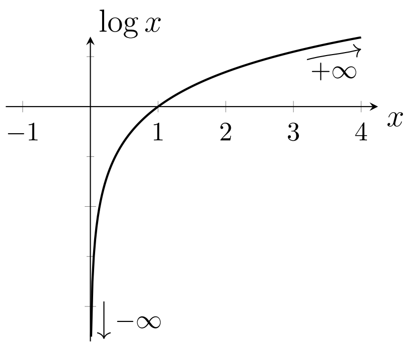
$\log_2(x+1) = 3$

$x + 1 = 2^3$

$x = 7$ Solução $= \{7\}$

Curva da função logarítmica:

$y = \log x$



O número e (Base dos logaritmos neperianos):

Exemplo: Juros compostos.

R$ 100,00 rendendo 10% ao ano.

$$\begin{array}{lll}
\text{Fim do } 1^{\text{o}} \text{ ano} & 100+10 & = 110 \\
\text{Fim do } 2^{\text{o}} \text{ ano} & 110+11 & = 121 \\
\text{Fim do } 3^{\text{o}} \text{ ano} & 121+12{,}1 & = 133{,}1 \\
\vdots & \vdots & \\
\text{Fim do } 10^{\text{o}} \text{ ano} & & = 259{,}37
\end{array}$$

Generalizando:

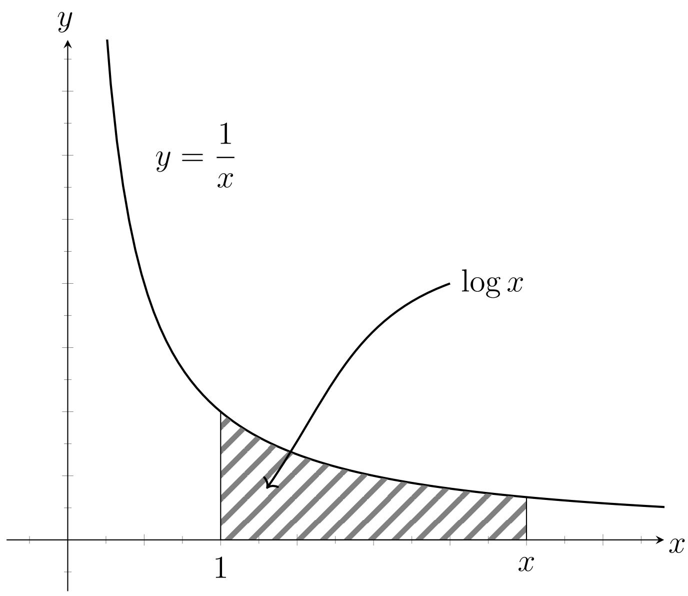
$$\begin{array}{lll}
\text{Fim do } 1^{\text{o}} \text{ ano} & C+\dfrac{C}{n} \text{ ou } C\left(1+\dfrac{1}{n}\right) & \\
\text{Fim do } 2^{\text{o}} \text{ ano} & \left(C+\dfrac{C}{n}\right)+\dfrac{1}{n}\left(C+\dfrac{C}{n}\right) & = C\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 \\
\vdots & \vdots & \\
\text{Fim do } 10^{\text{o}} \text{ ano} & & = C\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n
\end{array}$$

Se fazemos $\boxed{n \to \infty}$ ou seja subdivisões *contínuas*, temos um limite.

$$\begin{aligned}
e &= \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad n \to \infty \\
&= 2{,}718281\ldots
\end{aligned}$$

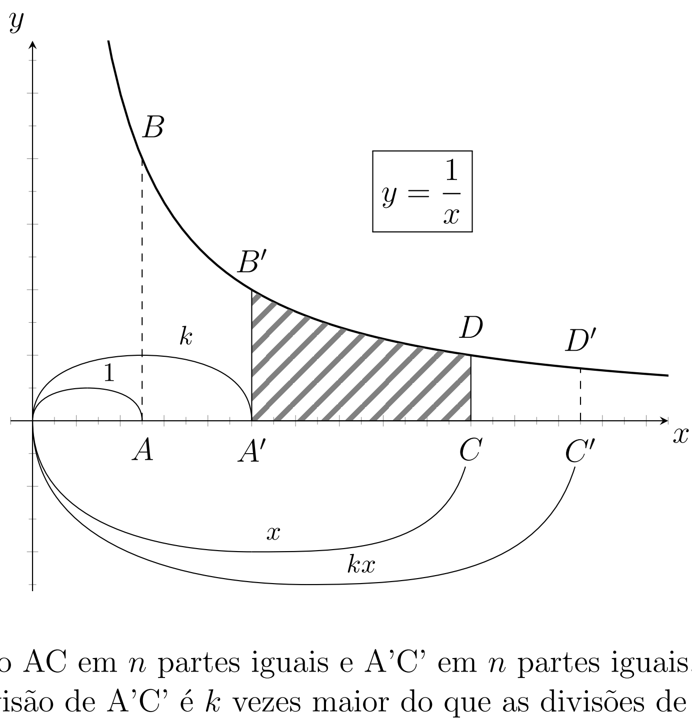
Logaritmos Neperianos

É o valor da área compreendida entre a curva, o eixo dos x, a ordenada cuja abscissa é x é a ordenada de abscissa 1.



$\Longrightarrow$ $\boxed{\log 1 = 0}$

$\log x =$ Área ABCD



Dividindo AC em n partes iguais e A'C' em n partes iguais.

Cada divisão de A'C' é k vezes maior do que as divisões de AC.

Cada altura do elemento A'C' é k vezes menor do que a de AC $\Longrightarrow$ as áreas são iguais.

$$\text{área ABCD} \; = \; \text{área A'B'C'D'}$$

$\Longrightarrow$ área ABA'B' = área CDC'D'
$\Longrightarrow$ área total ABC'D' = área ABCD + área CDC'D'
= área ABCD + área ABA'B'
$\Longrightarrow$ $\log kx = \log x + \log k$

Assim podem ser deduzidas todas as propriedades dos logaritmos ...

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

$$\log(a)^n = n \cdot \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a$$

À esquerda de 1 as áreas são consideradas negativas ...

<u>**OBS:**</u>

1) $\log x = 2{,}30259 \log_{10} x \approx 2{,}3 \log_{10} x$

2) A expressão a^x pode sempre ser posta sob a forma e^{bx}.

$\boxed{a > 1}$

$$y = a^x$$

$$\log y = \log a^x = x \log a$$

$$\log a = b \implies \log y = x \cdot b \implies \boxed{y = e^{bx}}$$

$\boxed{a < 1}$

$$\log a = -b$$

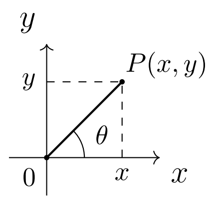
$$\log y = -b \cdot x \implies \boxed{y = e^{-bx}}$$

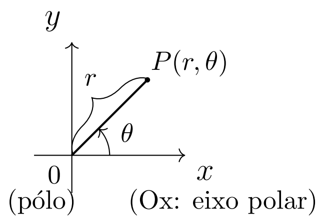
2.7 Coordenadas Polares

Um ponto no plano em coordenadas cartesianas é representado pelo par ordenado (x, y) onde x, a abscissa, corresponde à projeção do ponto no eixo Ox e y, a ordenada, corresponde à projeção do ponto o eixo Oy.

No sistema de coordenadas polares, um ponto no plano é representado pelo par (r, θ), sendo r a distância entre o ponto e um outro ponto fixo, denominado origem do sistema (ou pólo) e o ângulo θ medido no sentido anti-horário, entre a semirreta partindo do pólo e contendo o ponto, e um eixo de referência que contém o pólo (eixo polar).

Estas formas de representação de um ponto no plano, estão mostradas nas figuras abaixo:



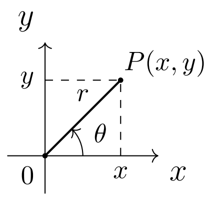


OBS.: $(r, \theta) = (r, \theta + 2\pi)$

Exemplo: $(r, \theta) = (r, 0 + 2\pi \ldots)$

Mudança de coordenadas:

a) Polares para cartesianas



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

b) Cartesianas para polares

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2\big(\underbrace{\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta}_{1}\big) = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2}$$

OBS.: Se $r = 0 \Rightarrow$ podemos tomar θ qualquer.

$$\text{Se } r \neq 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{x}{r}\,; \;\; \mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{r}$$

Exemplos:

1) Circunferência centrada na origem, de raio 5:

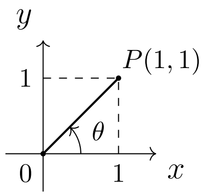
Equação polar:

Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \Rightarrow r^2 = 25$

$\Rightarrow \boxed{r = 5}$

2) Transformação de coordenadas cartesianas para polares. Seja o ponto $P(1,1)$.

$(1,1) \longrightarrow$



$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\mathrm{tg}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{8} + 2k\pi$

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{8} \end{array}\right\} P(r,\theta) = P\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{8}\right)$$

OBS.: $P(x,y) = P(1,1)$ coordenadas cartesianas

$\Rightarrow P\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{8}\right)$ coordenadas polares

3) Transformar as coordenadas cartesianas para polares de $P(-1,1)$.

Solução:

$r^2 = (-1)^2 + 1^2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\mathrm{sen}\,\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

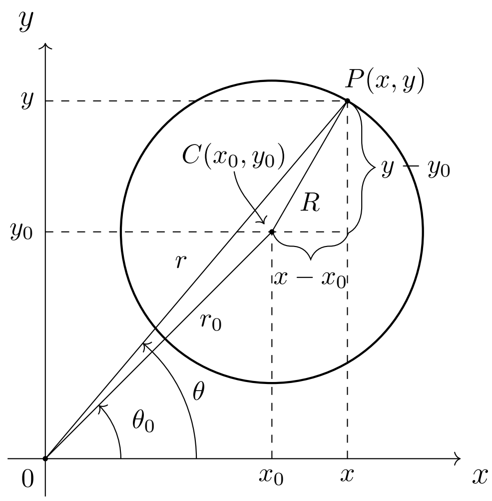
Então o ponto P terá como coordenadas polares $\left(\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

4) Encontrar as coordenadas cartesianas do ponto $P\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

Solução:

$$\begin{array}{l} x = -2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \\ y = -2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \end{array} \Rightarrow x = -1\,;\ y = -\sqrt{3} \Rightarrow P(-1, -\sqrt{3})$$

Equação da circunferência em coordenadas polares:



Centro C: (x_0, y_0)
Raio: R

Equação: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

Centro da circunferência:	Ponto da circunferência:
$x_0 = r_0 \cos\theta_0$	$x = r\cos\theta$
$y_0 = r_0 \operatorname{sen}\theta_0$	$y = r\operatorname{sen}\theta$

$\Rightarrow \ (r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)^2 + (r\operatorname{sen}\theta - r_0\operatorname{sen}\theta_0)^2 = R^2$

$$r^2\cos^2\theta - 2r_0\cos\theta_0 \cdot r\cos\theta + r_0^2\cos^2\theta_0 + r^2\operatorname{sen}^2\theta - 2r_0\operatorname{sen}\theta_0 \cdot r\operatorname{sen}\theta + r_0^2\operatorname{sen}^2\theta_0 = R^2$$

$$r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) + r_0^2(\cos^2\theta_0 + \operatorname{sen}^2\theta_0) - 2r_0\cos\theta_0 \cdot r\cos\theta - 2r_0\operatorname{sen}\theta_0 \cdot r\operatorname{sen}\theta = R^2$$

Considerando que:

$r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r^2$ e $r_0^2(\cos^2\theta_0 + \operatorname{sen}^2\theta_0) = r_0^2$

temos:

$$r^2 \underbrace{-2r_0\cos\theta_0}_{a} \cdot r\cos\theta \underbrace{-2r_0\operatorname{sen}\theta_0}_{b} \cdot r\operatorname{sen}\theta + \underbrace{r_0^2 - R^2}_{c} = 0$$

Equação da circunferência:

$$\boxed{r^2 + a\,r\cos\theta + b\,r\operatorname{sen}\theta + c = 0}$$

onde:

$a = -2r_0\cos\theta_0$

$b = -2r_0 \operatorname{sen}\theta_0$
$c = r_0^2 - R^2$

Exemplo: Represente graficamente a circunferência dada pela expressão abaixo:

$$r^2 - \sqrt{3}r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta - 8 = 0$$

$\circledast\; a = -2r_0\cos\theta_0 = -\sqrt{3}$

$b = -2r_0\operatorname{sen}\theta_0 = -1$

$c = r_0^2 - R^2 = -8$

$\circledast \Rightarrow -\sqrt{3} = -\cancel{2}r_0 \times \dfrac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

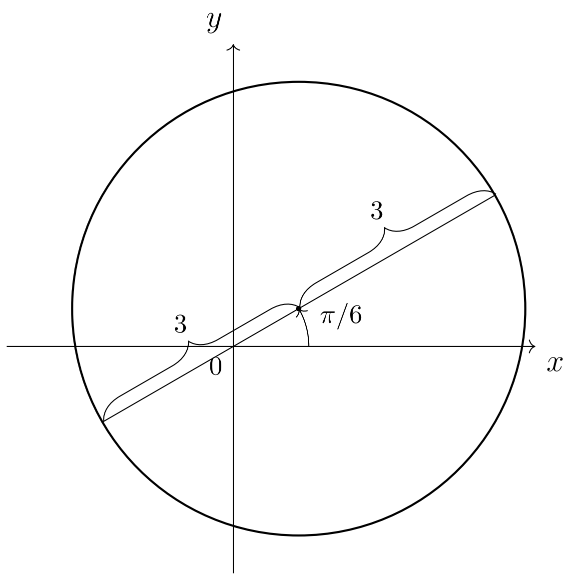
$\boxed{r_0 = 1}$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_0}{\cos\theta_0} = \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\theta_0 = \frac{\theta}{6}}$$

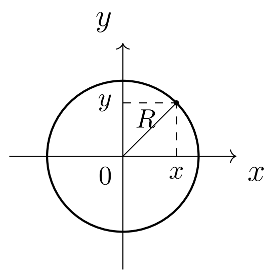
$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta_0 = \frac{1}{2}};\ \boxed{\cos\theta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$r_0^2 - R^2 = -8$
$1^2 - R^2 = -8$
$-R^2 = -9$
$\boxed{R = 3}$



Casos Particulares

1) Circunferência centrada na origem com raio R



$x^2 + y^2 = R^2$ (coordenadas cartesianas)

$r^2 \cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta = R^2$

$r^2(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = R^2$

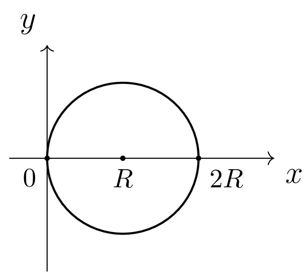
$r^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{r = R}$ coordenadas polares

A partir da equação geral

$r^2 + a\, r_0 \cos\theta + b\, r_0 \operatorname{sen}\theta + c = 0$

$$\left.\begin{aligned} a &= -2r_0 \cos\theta_0 \\ b &= -2r_0 \operatorname{sen}\theta_0 \\ c &= r_0^2 - R^2 \end{aligned}\right\} \text{com } \boxed{r_0 = c} \Rightarrow r^2 = R^2 \Rightarrow \boxed{r = R}$$

2) Circunferência de raio R centrada num ponto pertencente a Ox e tangente a Oy. Tangente à direita do eixo:



$(x - R)^2 + y^2 = R^2$

$x^2 - 2Rx + \cancel{R^2} + y^2 = \cancel{R^2}$

$x^2 + y^2 - 2Rx = 0$

$\Rightarrow r^2 \cos^2\theta - 2Rr\cos\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta = 0$

$r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1}) - 2Rr\cos\theta = 0$

$r^2 - 2Rr\cos\theta = 0 \Rightarrow r^{\cancel{2}} = 2R\cancel{r}\cos\theta$

$\boxed{r = 2R\cos\theta}$

A partir da equação geral:

(*) $r^2 - 2r_0 \cos\theta_0 \cdot r\cos\theta - 2r_0 \operatorname{sen}\theta_0 \cdot r \operatorname{sen}\theta + r_0^2 - R^2 = 0$

$$\begin{aligned} a &= -2r_0 \cos\theta_0 \\ b &= -2r_0 \operatorname{sen}\theta_0\,; \\ c &= r_0^2 - R^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\text{com } x_0 = R\,;\ \theta_0 = 0 \\ &\Rightarrow r_0 = R \end{aligned}$$

$\Rightarrow a = -2r_0 = -2R \Rightarrow \boxed{r_0 = R}$

(*) $r^2 - 2Rr\cos\theta = 0$

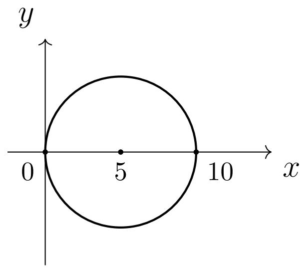
$\Rightarrow r^{\cancel{2}} = 2R\cancel{r}\cos\theta \Rightarrow \boxed{r = 2R\cos\theta}$

OBS.: Tangente ao eixo Oy, à esquerda:

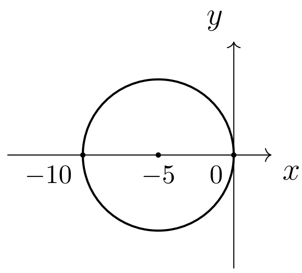
$$\boxed{r = -2R\cos\theta}$$

<u>Exemplo:</u>

$r = 10\cos\theta$ (tangente à direita)



$r = -10\cos\theta$ (tangente à esquerda)



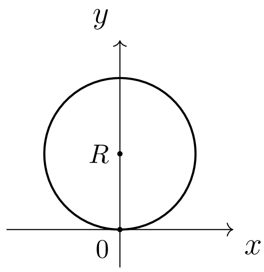
3) Tangente ao eixo Ox.

Acima do eixo

$x^2 + (y - R)^2 = R^2$

$x = r\cos\theta;\ y = r\operatorname{sen}\theta$

$x_0 = 0;\ y_0 = R$



$r^2\cos^2\theta + (r\operatorname{sen}\theta - R)^2 = R^2$

$r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta - 2Rr\operatorname{sen}\theta + \cancel{R^2} = \cancel{R^2}$

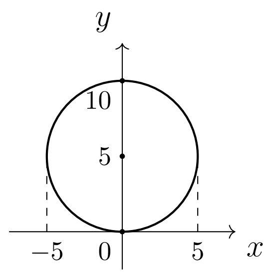
$r^2(\underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1}) - 2Rr\operatorname{sen}\theta = 0$

$r^2 - 2Rr\operatorname{sen}\theta = 0$

$r^{\cancel{2}} = 2R\cancel{r}\operatorname{sen}\theta$

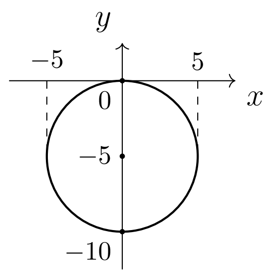
$\boxed{r = 2R\operatorname{sen}\theta}$

<u>Exemplo:</u> $r = 10\operatorname{sen}\theta$ (tangente a Ox por cima)



Exemplo: $r = -10 \operatorname{sen} \theta$ (tangente a Ox por baixo)

$x^2 + (y + R)^2 = R^2$



Como caso particular da equação geral, temos:

$$\boxed{r^2 + a\, r_0 \cos\theta + b\, r_0 \operatorname{sen}\theta + c = 0}$$

$a = -2r_0 \cos\theta_0$

$b = -2r_0 \operatorname{sen}\theta_0$

$c = r^2 - R^2$

Neste caso particular, temos:

$r_0 = R$

$\theta_0 = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{a = 0}$ e $b = -2r_0 = -2R$

$c = 0$

$\Rightarrow\ r^2 - 2Rr \operatorname{sen}\theta = 0$

$r^{\cancel{2}} = 2R\cancel{r} \operatorname{sen}\theta$

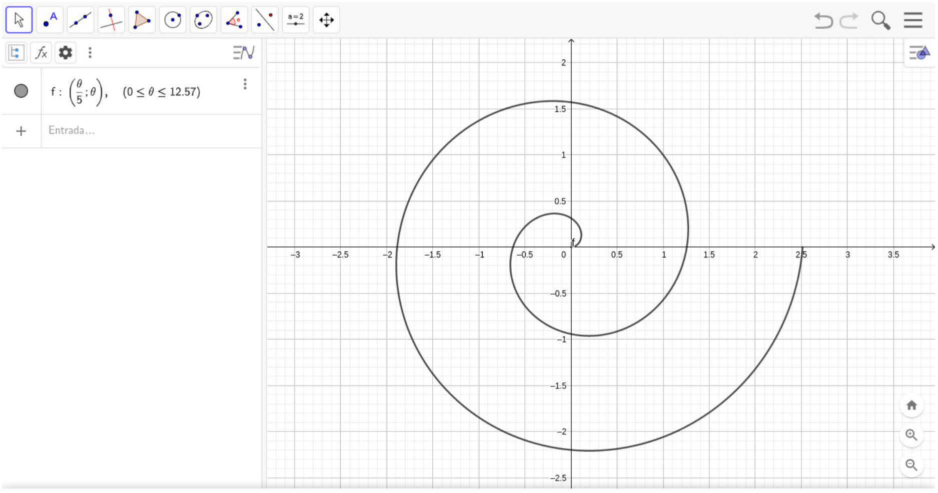
$\boxed{r = 2R \operatorname{sen}\theta}$

Espirais em coordenadas polares

a) Espiral de *Arquimedes*

$$r = a + b\theta$$

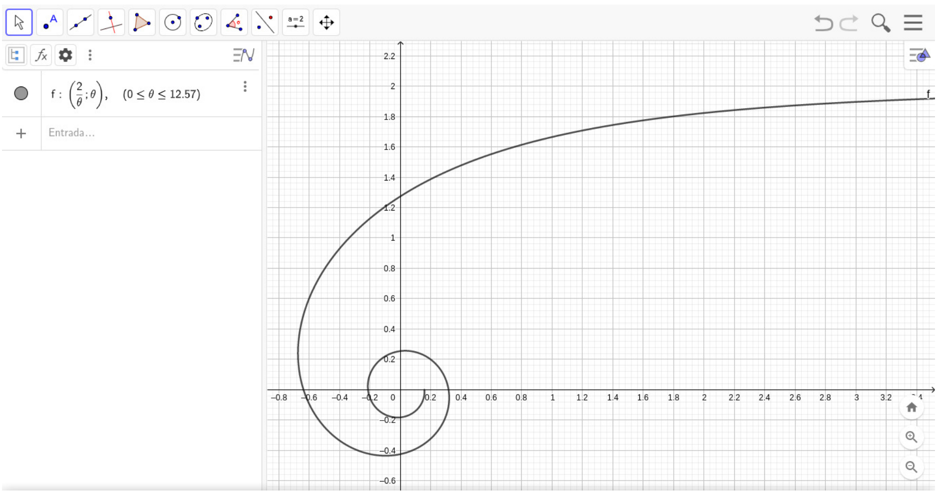
Exemplo: $r = \dfrac{\theta}{5}$



b) Espiral hiperbólica (é a inversa da espiral de Arquimedes)

$$r\theta = a$$

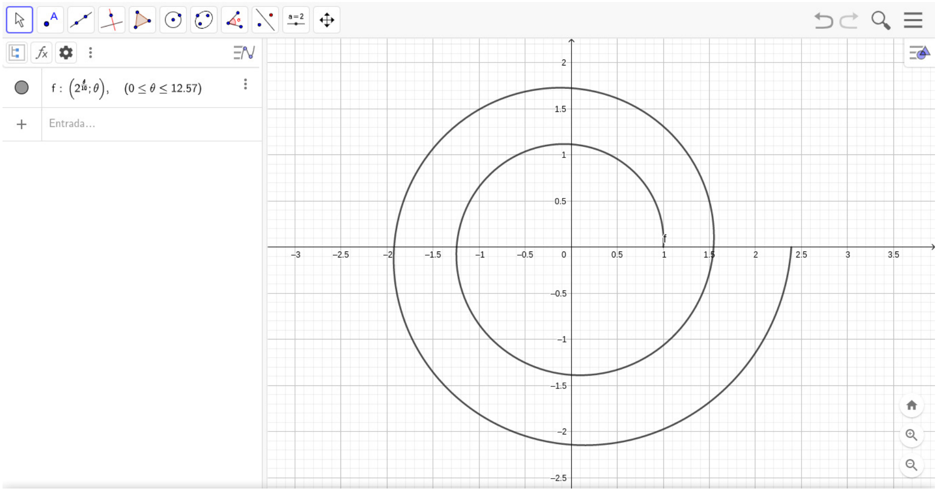
<u>Exemplo:</u> $r = \dfrac{2}{\theta}$



c) Espiral *logaritmica*

$$r = a^{b\theta}\ ;\ a > 0 \quad || \quad \text{coordenadas polares: } r = ae^{\theta \operatorname{cotg} b}$$

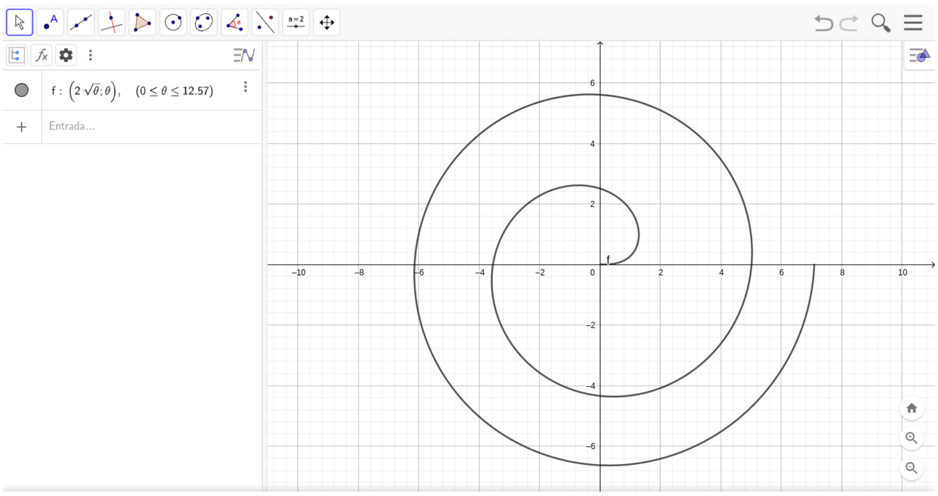
<u>Exemplo:</u> $r = 2^{\theta/10}$



d) Espiral parabólica

$$r = a\sqrt{\theta}$$

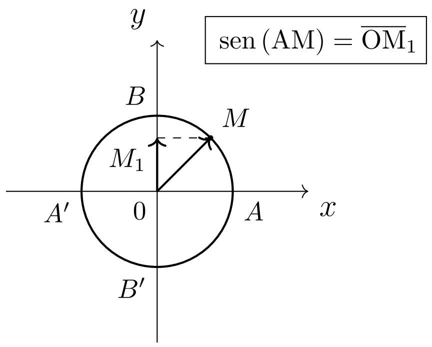
<u>Exemplo:</u> $r = 2\sqrt{\theta}$

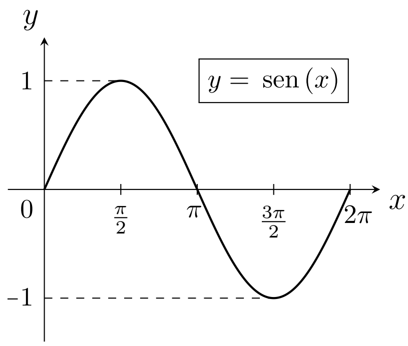


2.8 Funções Trigonométricas

2.8.1 Função Seno

Seja a circunferência com raio = 1





Propriedades da função seno:

1) Domínio $\mathbb{R}$.

2) Imagem $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

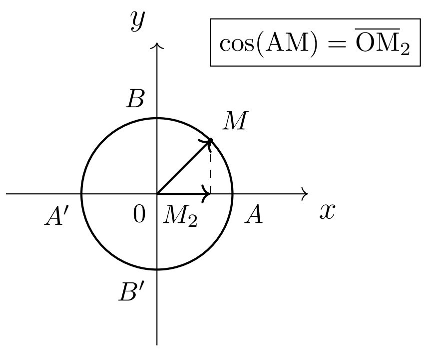
3) (+) no I° e II° quadrantes.
   (−) no III° e IV° quadrantes.

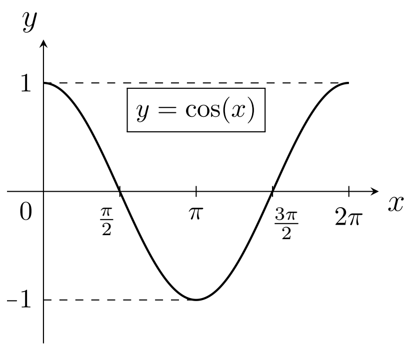
4) Crescente no I° e IV° quadrantes.
   Decrescente no II° e III° quadrantes.

5) Função tem período 2π.

6) Função ímpar.

2.8.2 Função Cosseno





Propriedades da função cosseno:

1) Domínio $\mathbb{R}$.

2) Imagem $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.

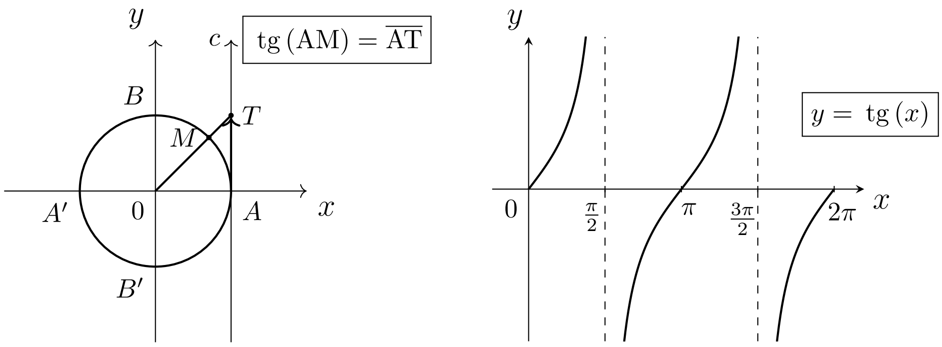
3) (+) no I^o e IV^o quadrantes.
   (−) no II^o e III^o quadrantes.

4) Crescente no III^o e IV^o quadrantes.
   Decrescente no I^o e II^o quadrantes.

5) Função tem período 2π.

6) Função par.

2.8.3 Função Tangente



Os arcos onde OM$/\!/c$ a função não é definida:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Propriedades da função tangente:

1) Domínio $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

2) Imagem $\mathbb{R}$.

3) (+) no I^o e III^o quadrantes.
   (−) no II^o e IV^o quadrantes.

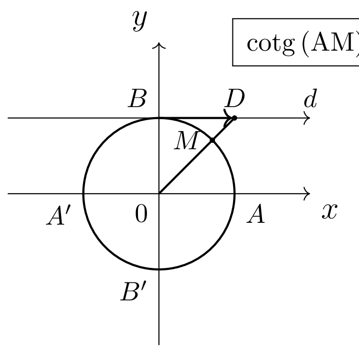
4) Crescente em *todos* os quadrantes.

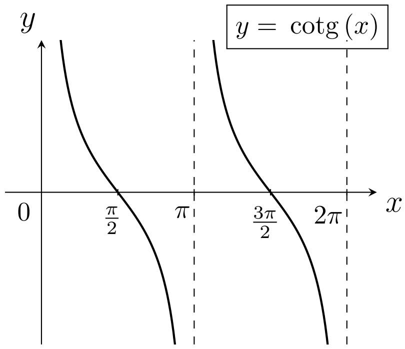
5) Função tem período π.

6) Função ímpar.

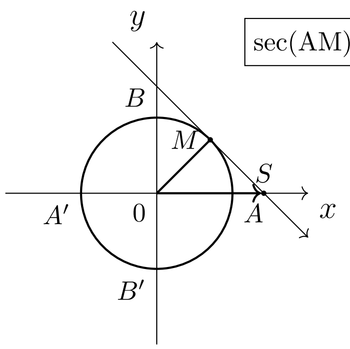
7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

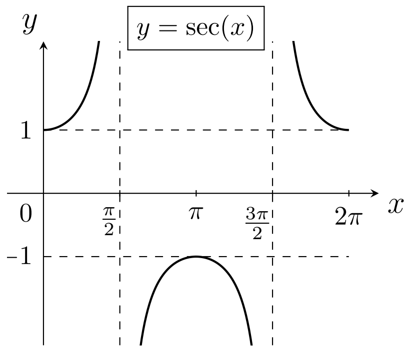
2.8.4 Função Cotangente





2.8.5 Função Secante





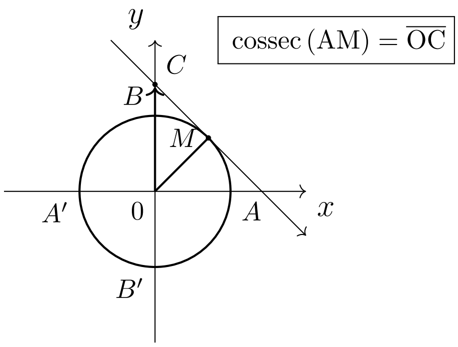
Propriedades da função secante:

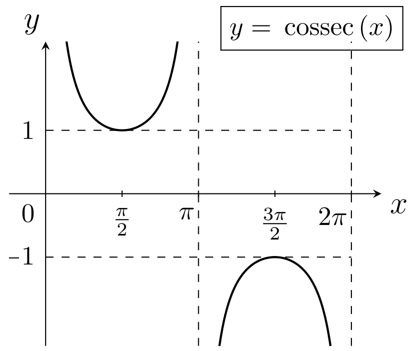
1) Domínio $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

2) Imagem $\{y \in \mathbb{R} \,|\, y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$.

3) Função par.

2.8.6 Função Cossecante





Propriedades da função cossecante:

1) Domínio $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq k\pi\}$.

2) Imagem $\{y \in \mathbb{R} \,|\, y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$.

3) Função tem período 2π.

2.8.7 Resumo dos sinais e variações das funções trigonométricas nos diversos quadrantes:

Quadrante	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg} x$	$\sec x$	$\operatorname{cossec} x$
I	$+$ 0 até 1	$+$ 1 até 0	$+$ 0 até ∞	$+$ ∞ até 0	$+$ 1 até ∞	$+$ ∞ até 1
II	$+$ 1 até 0	$-$ 0 até -1	$-$ $-\infty$ até 0	$-$ 0 até $-\infty$	$-$ $-\infty$ até -1	$+$ 1 até ∞
III	$-$ 0 até -1	$-$ -1 até 0	$+$ 0 até ∞	$+$ ∞ até 0	$-$ -1 até $-\infty$	$-$ $-\infty$ até -1
IV	$-$ -1 até 0	$+$ 0 até 1	$-$ $-\infty$ até 0	$-$ 0 até $-\infty$	$+$ ∞ até 1	$-$ -1 até $-\infty$

2.8.8 Relações entre as funções trigonométricas

- $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{\operatorname{cossec} x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\operatorname{cotg} x}$
- $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$; $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
- $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$; $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$; $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$
- $\operatorname{sen} x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$; $\cos x = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

- $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$; $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$

Fórmulas da adição

- $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
- $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$
- $\operatorname{cotg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y}$

Fórmulas de ângulos duplos

- $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$; $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
- $\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$; $\cos x = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$; $\operatorname{tg} x = \dfrac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}x}$
- $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$; $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$
- $1 + \cos x = 2\cos^2 \dfrac{x}{2}$; $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$
- $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$; $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$;
  $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Soma, diferença e produto de funções trigonométricas

- $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$
- $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x - y)$
- $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$
- $\cos x - \cos y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x + y) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(y - x)$
- $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\{\cos(x - y) - \cos(x + y)\}$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}\{\cos(x - y) + \cos(x + y)\}$
- $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)\}$

Valores das funções trigonométricas para "ângulos notáveis"

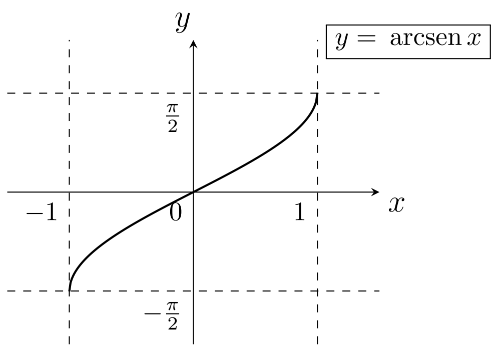
	30^o	45^o	60^o
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

2.9 Funções Trigonométricas Inversas

2.9.1 Função arco seno:

$$\begin{aligned} & y = \operatorname{sen} x \\ \text{Inversa} \longrightarrow \; & x = \operatorname{sen} y \\ & \Rightarrow y = \operatorname{arcsen} x \end{aligned}$$

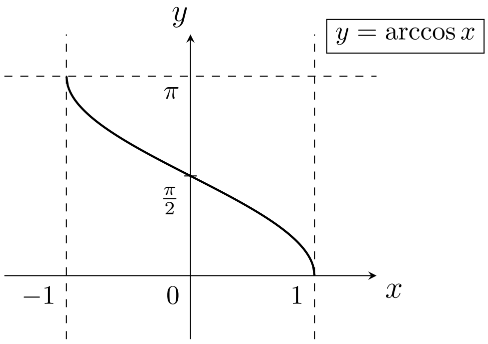
x varia de -1 a 1 e y de $-\dfrac{\pi}{2}$ a $+\dfrac{\pi}{2}$



2.9.2 Função arco cosseno:

$$\begin{aligned} & y = \cos x \\ \text{Inversa} \longrightarrow \; & x = \cos y \\ & \Rightarrow y = \arccos x \end{aligned}$$

x varia de -1 a 1 e y de 0 a π



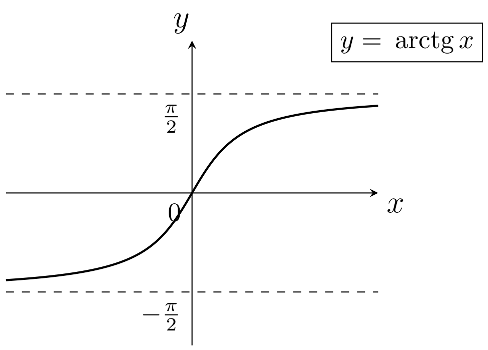
2.9.3 Função arco tangente:

$$y = \operatorname{tg} x$$

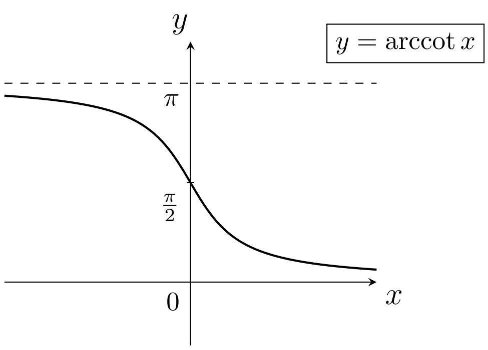
Inversa $\longrightarrow$ $x = \operatorname{tg} y$

$$\Rightarrow y = \operatorname{arctg} x$$

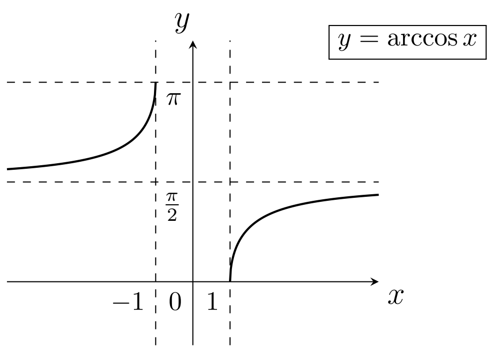
x varia de $-\infty$ a $+\infty$ e y de $-\dfrac{\pi}{2}$ a $+\dfrac{\pi}{2}$



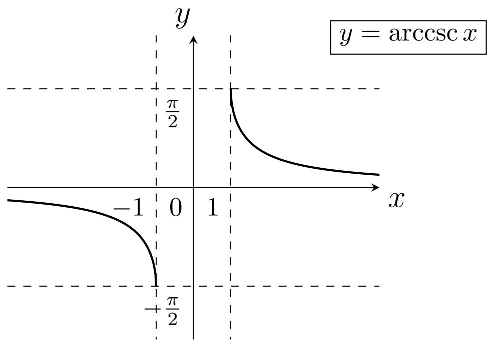
2.9.4 Função arco cotangente:



2.9.5 Função arco secante:



2.9.6 Função arco cossecante:



2.10 Translação, Reflexões e Expansões de Funções

Translação do gráfico de uma função $y = f(x)$ (com $c > 0$):

a) $y = f(x) + c$; translada o gráfico de $y = f(x)$, de c unidades para cima.

b) $y = f(x) - c$; translada o gráfico de $y = f(x)$, de c unidades para baixo.

c) $y = f(x - c)$; translada o gráfico da função original, de c unidades para a direita.

d) $y = f(x + c)$; translada o gráfico da função original, de c unidades para a esquerda.

Reflexões e expansões do gráfico de uma função $y = f(x)$ (com $c > 1$):

a) $y = c \cdot f(x)$; expande o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c.

b) $y = \frac{1}{c} \cdot f(x)$; comprime o gráfico de $y = f(x)$ verticalmente por um fator de c.

c) $y = f(c \cdot x)$; comprime o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c.

d) $y = f(x/c)$; expande o o gráfico de $y = f(x)$ horizontalmente por um fator de c.

e) $y = -f(x)$; reflete o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x.

f) $y = f(-x)$; reflete o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y.

2.11 Funções Transcendentais

As funções transcendentais são as funções não algébricas, que incluem as funções trigonométricas, trigonométricas inversas, exponenciais, logarítmicas, e outras funções que não são classificadas como as anteriores, como por exemplo, $\exp(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\ln(x)$, $\Gamma(x)$. A composição de funções transcendentais pode gerar uma função algébrica.

Exemplo: $f(x) = \operatorname{sen}(\cos^{-1} x) = \sqrt{(1 - x^2)}$

2.12 Aplicações

2.12.1 Centrifugação

No processo de centrifugação, separamos materiais pela sua massa. A taxa de sedimentação depende do campo centrífugo aplicado, da densidade e do raio da partícula, e da densidade e viscosidade do meio. Para efeitos práticos, utilizamos o cálculo da "força centrífuga relativa" (RCF) que informa quantas vezes o campo centrífugo é maior do que o campo gravitacional g. Da Física, podemos escrever

$$\underbrace{\cancel{m}\omega^2 r}_{\substack{\text{Força centrífuga}\\ \text{(considerado } r \text{ perpendicular}\\ \text{ao eixo de rotação)}}} = \underbrace{\cancel{m}g \times \text{RCF}}_{\substack{\text{Força equivalente,}\\ \text{em múltiplos de } g}}$$

onde: ω: velocidade angular $\left(\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)$

r: distância entre a partícula e o eixo de rotação

g: aceleração da gravidade

A relação entre a velocidade angular ω e o mínimo de rotações por minuto (rpm) pode ser escrita como:

$$\omega = \frac{2\pi \times \text{rpm}}{60},$$

onde o valor 60 no denominador é devido à passagem de segundos para minutos.

O campo centrífugo gerado pela rotação nas partículas à distância r do eixo, vale:

$$\omega^2 r = \left(\frac{2\pi \times \text{rpm}}{60}\right)^2 \times r = \frac{4\pi^2(\text{rpm})^2}{3600} \times r$$

A razão entre este valor e o campo g, é:

$$\text{RCF} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{4\pi^2(\text{rpm})^2}{3600 \times 980} \times r = \boxed{1{,}11 \times 10^{-5} \times (\text{rpm})^2 \times r}$$

onde o valor 980 no denominador corresponde à aceleração da gravidade, g, em cm/s^2, e não m/s^2.

Exemplo: Um rotor com raio médio 5 cm, girando a uma velocidade angular 10.000 rpm, cria um campo centrífugo de...

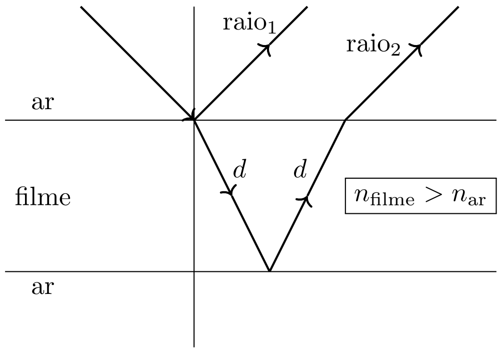
Solução: RCF $= 1{,}11 \times 10^{-5} \times 10^8 \times 5 = 1110 \times 5 = 5550g$

2.12.2 Espessura de filme ultrafinos por interferência de luz

Filmes finos transparentes, estão presentes em muitas situações experimentais, como, camada de óleo sobre água, ou sobre uma superfície de vidro, superfícies de bolhas de sabã, ou cortes ultrafinos de resina epoxi contendo material biológico obtidos por ultramicrotomia, boiando na superfície da água na "banheirinha" do ultramicrótono. A determinação da espessura deste corte é fundamental para a sua posterior análise por microscopia eletrônica de transmissão pois, como se sabe, os elétrons penetram fracamente na matéria, limitando as espessuras observáveis, a valores que usualmente não ultrapassam 100 nm (1 nm $= 10^{-9}$ m).

As espessuras de filmes finos podem ser estimadas pelas cores de interferência causadas pelos raios refletidos nas interfaces do filme com o meio adjacente.

Seja a situação das bolhas de sabão, considerando a figura abaixo onde a incidência da luz é aproximadamente perpendicular à interface com o ar e a espessura do filme diminuta.



n_{filme}: índice de refração do filme.

n_{ar}: índice de refração do ar.

Reflexão na interface ar/filme causa inversão de fase na onda de luz.

Reflexão na interface filme/ar não causa inversão de fase.

Para o caso de interferência destrutiva: Diferença de caminho entre os raios ① e ② (consideradas as aproximações feitas):

$$\boxed{2d = m\lambda_{\text{filme}}}\,; \text{ com } m = 1, 2, 3\,,$$

onde λ_{ar} = comprimento de onda da luz no ar, λ_{filme} = comprimento de onda da luz no filme.

A óptica nos ensina que: $\lambda_{\text{filme}} = \dfrac{\lambda_{\text{ar}}}{n_{\text{filme}}}$

$$\Rightarrow \boxed{2d = m\lambda_{\text{filme}} = m\frac{\lambda_{\text{ar}}}{n_{\text{filme}}}}$$

Para o caso de haver interferência construtiva, devemos ter:

$$2d = (2m-1)\frac{1}{2}\,\lambda_{\text{filme}};\ m = 1, 2, 3, \ldots$$

$\Rightarrow\ 2d = (2m-1)\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda_{\text{ar}}}{n_{\text{filme}}}\right)$, ou seja, um número ímpar de meios comprimentos de onda.

<u>Exemplo:</u> Imagine um feixe de luz na faixa do visível (400–700 nm) incidindo perpendicularmente à superfície de uma bolha de sabão (considere n_{bolha} = 1,34), cuja espessura do filme de sabão foi obtida previamente e vale 300 nm. Quais os comprimentos de onda na faixa do visível que apresentariam interferência construtiva neste caso?

Solução:

$$2d = \overbrace{(2m-1)}^{\text{n}^{\text{o}}\text{ ímpar}} \overbrace{\frac{1}{2}\frac{\lambda_{\text{ar}}}{n_{\text{filme}}}}^{\substack{\text{meios comprimentos}\\ \text{de onda dentro}\\ \text{do filme}}}$$

$\Rightarrow 600 = (2m-1)\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\lambda_{\text{ar}}}{1{,}34}$

$1608 = (2m-1)\lambda_{\text{ar}}$

$\boxed{m=1} \Rightarrow$ 1608 (infravermelho, não visível)

$\boxed{m=2} \Rightarrow$ 536 (verde, **visível**)

$\boxed{m=3} \Rightarrow$ 321 (ultravioleta, não visível)

Exercício: Considere um corte ultrafino de resina epoxi transparente, cujo índice de refração é $n = 1{,}5$, boiando sobre a água no ultramicrótomo e com luz incidente aproximadamente perpendicular à superfície do corte. Quais os comprimentos de onda que apresentam interferência construtiva para as componentes de luz refletidas na faixa do visível (400 nm a 700 nm) se a espessura do filme for de 100 nm?

Solução: Expressão para interferência construtiva:

$2d = (2m-1)\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\lambda_{\text{ar}}}{n_{\text{filme}}}$

$2 \times 100 = (2m-1)\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\lambda_{\text{ar}}}{1{,}5}$

$(2m-1)\lambda_{\text{ar}} = 2 \times 100 \times 2 \times 1{,}5$ nm

$(2m-1)\lambda_{\text{ar}} = 600$ nm

$\boxed{m=1} \Rightarrow \boxed{\lambda_{\text{ar}} = 600 \text{ nm}}$, **visível**

$\boxed{m=2} \Rightarrow \lambda_{\text{ar}} = 200$ nm, ultravioleta

Expressão para a interferência destrutiva:

$2d = m\,\dfrac{\lambda_{\text{ar}}}{n_{\text{filme}}} \Rightarrow 200 = m\,\dfrac{\lambda_{\text{ar}}}{1{,}5}$

$m\lambda_{\text{ar}} = 300$

$\boxed{m=1} \Rightarrow$ 300 nm

OBS: Com a combinação dos comprimentos de onda para interferência construtiva e destrutiva é possível construir uma tabela de cores para as espessuras.

As cores da interferência para cortes ultrafinos de resina epoxi boiando sobre a água no ultramicrótono, dependem da combinação entre interferências construtivas e destrutivas.

Para cortes de 100 nm, por exemplo (espessura óptica de $100 \times n = 150$ nm, pois $n = 1{,}5$ para resina epoxi), há interferência destrutiva para comprimentos de onda de 300 nm, ou seja, próximo ao azul. Há também interferência construtiva na região de 600 nm, próximo ao vermelho.

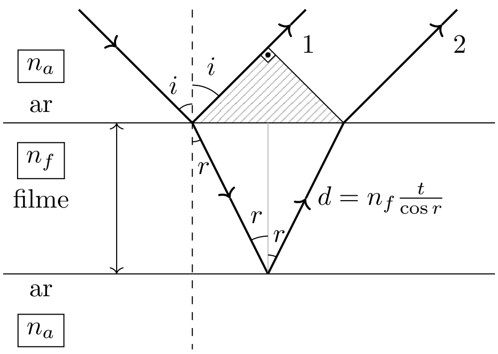
O resultado é um deslocamento para a faixa espectral no sentido de comprimentos de onda maiores com predominância do amarelo e vermelho, dando a sensação de dourado.

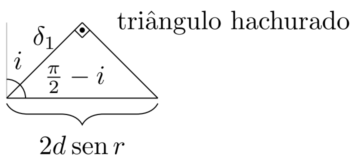
Na tabela abaixo vemos a correspondência entre as cores.

cinza escuro	< 40 nm
cinza	40–50 nm
prateados	50–70 nm
dourados	70–90 nm
púrpura	> 90 nm

Exercício: Encontre uma expressão para a diferença de caminho óptico entre os raios luminosos refletidos nas superfícies de bolhas de sabão, considerando um ângulo de incidência i em relação à normal à superfície externa da bolha.

Solução:





OBS: Reflexão na interface ar/filme causa inversão de fase na onda luminosa. Reflexão na interface filme/ar não causa inversão na fase.

n_a: índice de refração do ar.

n_f: índice de refração do filme.

i: ângulo de incidência

r: ângulo de refração

t: espessura do filme

$2d$: caminho da luz no interior do filme

Lei de Snell:

$$\begin{cases} n_a \cdot \operatorname{sen} i = n_f \cdot \operatorname{sen} r \\ n_a = 1 \end{cases}$$

$\delta_1 = \dfrac{2t}{\cos r} \operatorname{sen} r \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - i\right)$

$\Rightarrow \; \delta_1 = \dfrac{2t \operatorname{sen} r \cdot \operatorname{sen} i}{\cos r}$

Mas $\underbrace{n_a}_{1} \cdot \operatorname{sen} i = n_f \operatorname{sen} r$ (pela lei de Snell)

$\Rightarrow \boxed{\delta_1 = \dfrac{2t \operatorname{sen} r \times n_f \operatorname{sen} r}{\cos r}}$

$\delta_1 = \dfrac{2tn_f \operatorname{sen}^2 r}{\cos r}$

$\delta_2 = 2d = 2 \times \dfrac{t}{\cos r} \times n_f$

$\delta_2 = \dfrac{2n_f t}{\cos r}$

Diferença do caminho óptico:

$\delta = \delta_2 - \delta_1 = \dfrac{2n_f t}{\cos r} - \dfrac{2n_f t \operatorname{sen}^2 r}{\cos r} = \dfrac{2n_f t\overbrace{(1 - \operatorname{sen}^2 r)}^{\cos^2 r}}{\cos r}$

$\delta = \dfrac{2n_f t \cos^{\cancel{2}} r}{\cancel{\cos r}} \;\Rightarrow\; \boxed{\delta = 2n_f \cos r}$

<u>Interferência destrutiva</u>

$$\delta = 2n_f t \cos r = \underbrace{m\lambda}_{\substack{\text{n}^{\text{o}} \text{ inteiros de} \\ \text{comprimentos de onda}}} ; \; m = 1, 2, 3, \ldots$$

<u>Interferência construtiva</u>

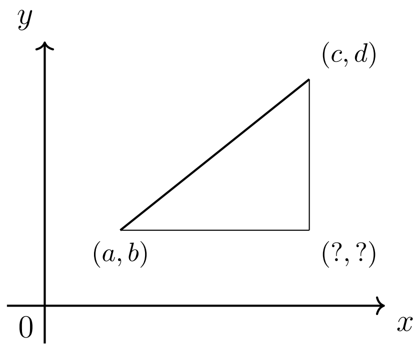
$$\delta = 2n_f t \cos r = \underbrace{(2m-1)\frac{1}{2} \times \lambda}_{\substack{\text{n}^{\text{o}} \text{ ímpar de meios} \\ \text{comprimentos de onda}}} ; \; m = 1, 2, 3, \ldots$$

ou

$$\delta = 2n_f t \cos r = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \, ; \; m = 0, 1, 2, \ldots$$

2.13 Exercícios

1) Determine as coordenadas do terceiro vértice de um triângulo retângulo com pontos (a, b) e (c, d) como extremidades da hipotenusa, cujos catetos são paralelos aos eixos, como na figura.



Solução: (a, d)

2) O gráfico de uma função linear $f(x)$ passa pelos pontos $(3, 2)$ e $(5, 8)$. Encontre o coeficiente angular m e o coeficiente linear b e a equação que descreve $f(x)$.

Solução:

$f(x) = mx + b$, onde

Equação passa por $(3, 2)$, então: $2 = 3 \cdot 3 + b$; $b = -9 + 2 = -7$

A equação fica: $y = 3x - 7$

3) Encontre a equação da reta paralela à reta $y = 3x + 2$, que passa pelo ponto $(2, 14)$.

Solução:

A nova reta tem coeficiente angular 3, isto é, $y = 3x + b$

Reta passa por $(2, 14)$, então: $14 = 3 \cdot 2 + b$; $b = 8$

Equação da nova reta: $y = 3x + 8$

4) Determine o ponto (x, y) onde o gráfico de (1) $y = 3x+2$ e (2) $y = x-5$, se cruzam, e trace o gráfico das retas no plano cartesiano.

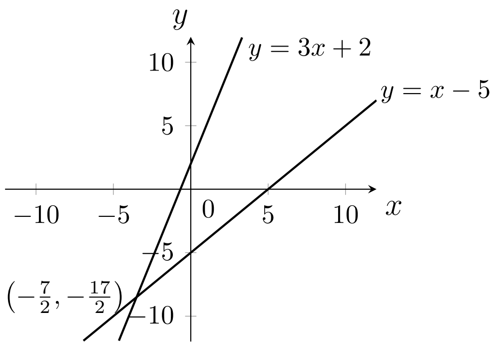
Solução:

$3x + 2 = x - 5\,;\; 2x = -7;$

Substituindo em (1), calculamos o valor de y

$2y = 4 - 21$

O ponto é: $\left(-\dfrac{7}{2}, -\dfrac{17}{2}\right)$



5) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto $(8, 1)$ e é perpendicular à reta $y = 4x + 5$.

Solução:

Sendo a reta original $y = mx + b$, a reta perpendicular $(y = m_1x + b_1)$ tem o coeficiente angular igual a: $-\frac{1}{m}$, e portanto $m_1 = -\frac{1}{4}$

A reta perpendicular passa por $(8, 1)$, então: $1 = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 8 + b_1$; $4 = -8 + 4b_1$; $b_1 = 3$

Reta perpendicular: $y = -\frac{1}{4}x + 3$

OBS: Dedução do coeficiente angular da reta perpendicular a uma reta dada

6) Determine $\operatorname{sen}(2x)$ sabendo que $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x) = 8$

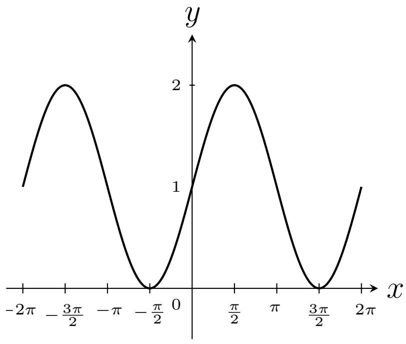
Solução:

$\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 8 \to \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 8 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

$\to 1 = 4 \cdot 2 \operatorname{sen} x \cos x \to 1 = 4 \operatorname{sen}(2x) \to \operatorname{sen}(2x) = \dfrac{1}{4}$

7) Desenhe o gráfico da função $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

Solução:



8) Desenhe o gráfico, determine o período e a imagem das funções:

a) $f(x) = 3\,\mathrm{sen}\,x$

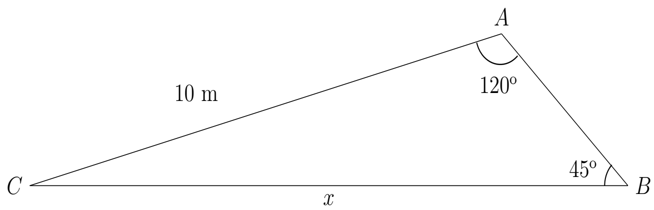
Solução: Período 2π; Imagem: y variando no intervalo $[-3, 3]$

b) $f(x) = \cos(2x)$

Solução: Expressão genérica $f(x) = \cos(kx)$, onde $k = \frac{2\pi}{p}$, pois cada vez que x é múltiplo do período p, a função se repete (lembrar que, na função cosseno, o período é 2π). Então, como $k = 2$, fica: $2 = \frac{2\pi}{p} \rightarrow p = \pi$. Imagem: y variando no intervalo $[-1, 1]$.

c) $f(x) = \cos(3x)$

9) Determine o valor de x no triângulo abaixo:



Solução:

$$\frac{\mathrm{sen}\,45^{\mathrm{o}}}{10} = \frac{\mathrm{sen}\,120^{\mathrm{o}}}{x} \rightarrow \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{10} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{x} \rightarrow \sqrt{2}\cdot x = 10\cdot\sqrt{3} \rightarrow x = 10\sqrt{\frac{3}{2}}$$

10) O índice de poluição $p(t)$ em unidades arbitrárias (u.a), numa certa cidade é uma função linear do tempo t. Se o índice de poluição é 4,0 às 2 horas da tarde e 8,0 às 6 da tarde, faça uma predição de seu valor às 9 horas da noite.

Solução:

Podemos resolver o problema por uma simples regra de três (solução 1), ou escrevendo a reta $p(t)$ (solução 2, geral), para qualquer valor de t.

Solução 1: $\dfrac{8-4}{6-2} = \dfrac{x-4}{9-2} \to \dfrac{4}{4} \cdot 7 = x - 4 \to x = 11$(u.a)

Solução 2: Coeficiente angular m, da reta $p(t)$; $m = \dfrac{8-4}{6-2} = 1 \to p(t) = x + b$

Reta passa por $(2, 4)$, então

$4 = 2 + b \to b = 2 \to p(t) = x + 2 \to p(9) = 9 + 2 = 11$(u.a)

11) Encontre as equações das retas que satisfaçam as condições dadas. Escrever a equação na forma:

a) inclinação (-5) e interseção com $y = 3$
b) inclinação 3 e interseção com $x = 4$
c) inclinação 2 e passa por $(-1, 3)$
d) passa por $(2, 4)$ e $(3, 9)$
e) passa por $(2, 4)$ e é horizontal
f) corta o eixo y em 4, e x em 2

Solução:

a) $y = -5x + b$; passa por $(0, 3)$; $3 = 0 + b \to b = 3 \to y = -5x + 3$
b) $y = 3x + b$; passa por $(4, 0)$; $0 = 3 \cdot 4 + b \to b = -12 \to y = 3x - 12$
c) $y = 2x + b \to 3 = 2(-1) + b \to b = 3 + 2 \to y = 2x + 5$
d) $y = mx + b \to m = \dfrac{9-4}{3-2} = 5 \to y = 5x + b$; passa por $(2, 4)$;
$4 = 5 \cdot 2 + b \to b = -6 \to y = 5x - 6$
e) $y = b \to b = 4 \to y = 4$
f) $y = mx + b \to m = \dfrac{0-4}{2-0} = -2$; $b = 4 \to y = -2x + 4$

12) A reta L_1, passa pelos pontos $(2,3)$ e $(-2,-3)$ e é paralela à reta L_2, que passa pelos pontos $(1,5)$ e $(x,8)$. Calcule o valor de x.

Solução:

Os coeficientes angulares das duas retas devem ser iguais.

$$m_1 = m_2 \rightarrow \frac{-3-3}{-2-2} = \frac{8-5}{x-1} \rightarrow \frac{-6}{-4} = \frac{3}{x-1} \rightarrow x = 2+1 = 3$$

13) Num experimento sobre a relação entre pressão e volume de um gás, verificou-se que quando a pressão é 1 atmosfera (atm), o volume é 30 cm^3, e quando a pressão atinge 10 atm, o volume é de 5 cm^3. Faça o gráfico da pressão em função do volume e calcule a inclinação da reta que os pontos determinam.

Solução:

14) Uma dose de 4 mg de um medicamento é ministrada em um paciente. A concentração da droga na corrente sanguínea do paciente após t horas, pode ser calculada por $K(t) = \dfrac{4}{1+t^3}$(mg/ml) . Pergunta-se:

a) Qual a concentração sérica do medicamento, após 1 hora? Após 2 horas? Comparar com a concentração inicial.

b) Esboce um gráfico da concentração sérica do medicamento, em relação ao tempo decorrido após sua aplicação.

15) O tempo, em minutos, que uma pessoa submetida a um teste, leva para completar uma tarefa, pode ser calculado por meio da fórmula $T(x) = \dfrac{440}{\sqrt{x}}$, onde x é o QI (coeficiente de inteligência) da pessoa. Pergunta-se:

a) Quanto tempo a pessoa deve levar para completar a tarefa, se seu QI for 100?

b) Qual o QI de uma pessoa que termina o teste em 40 minutos?

16) Um biólogo pretende fazer duas soluções químicas. Há 36 g do reagente I, 36 g do reagente II e 66 g do reagente III. Cada litro da solução A requer 1 g do reagente I, 4 g do reagente II e 6 g do reagente III. Para

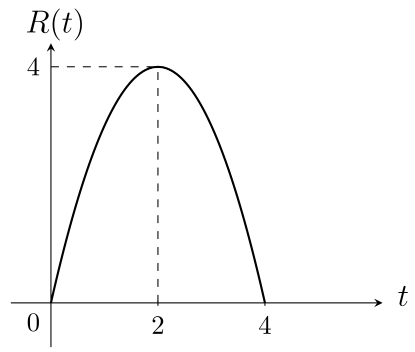
cada litro do regente B, são necessários 3 g do reagente I, 1 g do reagente II e 3 g do reagente III.
Para obter quantidades máximas em litros, quantos litros de cada solução, isoladamente, deverá fazer?

17) O alívio R (unidades arbitrárias u.a.) que uma aspirina provoca, é igual a quatro vezes o tempo t decorrente desde que é ingerida, menos o mesmo intervalo de tempo t elevado ao quadrado.
Expresse a quantidade de alívio como uma função do tempo, e desenhe o gráfico da função. Qual o intervalo de tempo para o qual o efeito é máximo?

Solução:

$R(t) = 4t - t^2 = t(4-t)$, de onde se conclui que o gráfico corta o eixo das abcissas em $t = 0$, e $t = 4$

Ponto de máximo: a parábola tem máximo $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2(-1)} = 2$



18) A porcentagem de ovos de *mariposas das maçãs*, que sobrevivem é de $N(T)$, onde a temperatura T °C é dada por: $N(T) = -0{,}53T^2 + 25T - 209$, para a faixa $15 \leq T \leq 30$. Perguntas:

a) Qual a porcentagem de ovos que sobrevivem quando a temperatura é 15°C?

b) Qual a porcentagem que sobrevive a 30°C?

c) A que temperatura a taxa de sobrevivência dos ovos é máxima?

d) Qual porcentagem sobrevive na temperatura ótima?

19) Um guarda florestal tem uma escolha entre duas abordagens de manejo da vida selvagem. A primeira produzirá uma população $f(x)$ de cervos no final de x anos, onde $f(x) = 20x^2 - 80x + 500$. A segunda abordagem levará à produção de cervos $g(x)$ no final de x anos, onde $g(x) = -50x^2 + 400x + 500$. Pergunta-se:

a) Qual abordagem leva à maior população de cervos no final de 2 anos? E de 4 anos?

b) Em que ponto no tempo, as duas abordagens levarão à mesma população?

c) Desenhar os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ num sistema de coordenadas ortogonais.

d) Qual abordagem você recomendaria para produzir o maior número possível de cervos em um tempo indefinido?

20) Usando $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, encontre:

a) $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$, para $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

b) $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$, para $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Solução:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \to \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \to 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x$

21) CÁLCULO ESPESSURA DE CORTE ULTRA-FINO SOBRE SUPERFÍCIE DA ÁGUA NO ULTRAMICRÓTOMO, POR INTERFERÊNCIOMETRIA

22) CÁLCULO DE ESPESSURA DE CORTE ULTRAFINO NO MICROSCÓPIO ELETRÔNICO DE TRANSMISSÃO USANDO A PARALAXE ENTRE IMAGENS

23) A partir da equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, que representa uma circunferência com centro em (x_0, y_0) e raio R, ache a equação geral da circunferência, e calcule as coordenadas do centro e o raio da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$.

24) Represente graficamente:

a) $y = 4 - x^2$
b) $y = x - 1$
c) $y = x^2$
d) $y = (x - 1)^2$
e) $y = (x + 1)^2$
f) $-2 \leq y \leq 5$
g) $y \geq x^2 - 2$

25) Para cada uma das funções abaixo, determine: a) Domínio (D), b) Gráfico cartesiano, c) Imagem (I), e d) diga se é injetora (ou não), sobrejetora (ou não).

I) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x| - 3\}$
II) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 - |x|\}$
III) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2|x|\}$
IV) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x| + x + 2\}$
V) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |2x + 1|\}$
VI) $f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{|x|}{x}\right\}$
VII) $f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + \frac{|x|}{x}\right\}$
VIII) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - 4\}$
IX) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x^2 - 4|\}$
X) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2 + 2x + 8\}$

26) A Fração F da luz que é absorvida por qualquer gás no ar está relacionada de forma logarítmica com a concentração c do gás, e a distância d percorrida pela luz; esta relação é chamada de Lei de *Beer-Lambert*:

$$\ln(1 - F) = -Kc\,d$$

Nesta equação, K é uma constante de proporcionalidade. Mostre que, para concentrações próximas de zero, (p.ex., onde $Kc\,d = 0{,}001$), F relaciona-se quase linearmente com c, enquanto que para valores maiores de $Kc\,d$ (p. ex., próximos de 2), quando dobra a concentração, a absorção de luz não aumenta o dobro (a primeira situação é análoga ao caso das moléculas traço que absorvem na região da janela, ao passo que a segunda situação é pertinente à absorção do dióxido de carbono). (Química ambiental, Colin Baird. ARTMED Editora S.A.)

27) Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação, o montante será de R$ 3500,00?

Solução:

$M = C \cdot (1 + i)^t$

M: montante; C: capital; i: taxa; t: tempo

$3500 = 500 \cdot (1 + 0{,}035)^t$

$\dfrac{3500}{500} = 1{,}035^t$

$1{,}035^t = 7$

$t \cdot \log 1{,}035 = \log 7$

$t = \dfrac{0{,}8451}{0{,}0149}$

$t = 56{,}7$

O montante de R$ 3500,00 será originado após 56 meses de aplicação.

28) Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Solução:

População inicial = P_0
População após t anos = $P_0 \cdot (1{,}03)^t = P_t$
Supondo que a população dobrará em relação ao ano-base após t anos:
$P_t = 2 \cdot P_0$
$P_0 \cdot (1{,}03)^t = 2 \cdot P_0$
$1{,}03^t = 2$
Aplicando logaritmo
$\log 1{,}03^t = \log 2$
$t \cdot \log 1{,}03 = \log 2$
$t \cdot 0{,}0128 = 0{,}3010$
$t = 0{,}3010/0{,}0128$
$t = 23{,}5$
A população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

29) Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra à taxa de 2% ao ano, se reduza a 200 g. Utilize a expressão:

$Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

Solução:

$Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$
$200 = 1000 \cdot e^{-0{,}02t}$
$200/1000 = e^{-0{,}02t}$
$1/5 = e^{-0{,}02t}$
$-0{,}02t = \ln(1/5)$
$-0{,}02t = \ln 1 - \ln 5$
$-0{,}02t = -\ln 5$
$0{,}02t = \ln 5$
$t = \ln 5/0{,}02$
$t = 1{,}6094/0{,}02$
$t = 80{,}47$
A substância levará 80,47 anos para se reduzir a 200 g.

30) Um estudo sobre o crescimento médio de crianças, com idades de 1 a 12 anos, obteve a fórmula $h = \log(10^{0,7} \cdot \sqrt{i})$, onde h é a altura, em metros, e i a idade, em anos. Por esta fórmula, qual seria a altura de uma criança de 10 anos?

Solução:

$$h = \log(10^{0,7} \cdot \sqrt{i})$$
$$h = \log 10^{0,7} + \log \sqrt{i}$$
$$h = 0{,}7 \log 10 + \log \sqrt{10}$$
$$h = 0{,}7 \log 10 + \log 10^{\frac{1}{2}}$$
$$h = 0{,}7 \log 10 + \log 10^{\frac{1}{2}}$$
$$h = 0{,}7 + \frac{1}{2}$$
$$h = 1{,}2 \text{ m}$$

31) Simplifique a expressão: $y = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}; x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Solução:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x;\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x;\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$
$$y = \frac{\cos x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} = -1$$

OBS: As funções seno e cosseno estão defasadas entre si de 90°, sendo que a função cosseno está adiantada de 90° em relação à função seno.

32) Em um sítio são criados coelhos e galinhas. Em certo momento, no total, estes animais somam 50 cabeças e 140 pés. Qual a razão entre o número de coelhos e o número de galinhas?

Solução:

C: coelhos; G: galinhas

$$C + G = 50 \longrightarrow -2C - 2G = -100$$
$$4C + 2G = 140 \longrightarrow 2C = 40 \longrightarrow C = 20 \longrightarrow G = 30 \longrightarrow \frac{C}{G} = \frac{2}{3}$$

33) Numa subtração, a soma do minuendo com o subtraendo e o resto vale 412. Qual o valor do minuendo?

Solução:

Minuendo: M; Subtraendo: S; Resto: R

$M + S + R = 2M \longrightarrow M = \dfrac{412}{2} = 206$

34) Uma torneira enche totalmente um certo tanque em 2 horas, enquanto o ralo deste tanque pode esvaziá-lo em 5 horas. A partir da condição do tanque vazio, ambos foram abertos simultaneamente. Após 3 horas de funcionamento, o ralo entupiu por completo. Após o entupimento, em quanto tempo o tanque transbordará?

Solução:
Q: vazão (volume/unidade de tempo); V: volume total; t: tempo; Q_i : vazão para o interior; Q_e vazão para o exterior; V_i : volume introduzido após 3 horas; V_e : volume retirado após 3 horas.
$Q = \dfrac{V}{t}$
Após 3 horas:
$V_i - V_e = Q_i \cdot t - Q_e \cdot t = \dfrac{V}{2} \cdot 3 - \dfrac{V}{5} \cdot 3 = \dfrac{15-6}{10} \cdot V = \dfrac{9}{10} \cdot V$
Resta o volume de $\dfrac{1}{10} \cdot V$, cujo tempo para encher, com o ralo entupido, será de:
$t = \dfrac{\frac{1}{10}V}{Q_i} = \dfrac{\frac{V}{10}}{\frac{V}{2}} = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{1}{5}$ hora $= 12$ min
Ou:
Considerando que em uma hora, a torneira enche meio tanque: $\dfrac{V}{2}$, e que em uma hora, o ralo retira do tanque: $\dfrac{V}{5}$

$(3 + t) \cdot \dfrac{V}{2} - 3 \cdot \dfrac{V}{5} = V$
$t = \dfrac{1}{5}$ hora $= 12$ min

35) Um reservatório na forma de um cilindro circular reto, com o raio da base e altura, iguais a 1 m, contém 15 L de água e deverá ser completado com água fornecida por uma torneira cuja vazão é de 5 L de água

por minuto. Qual o tempo para encher completamente o reservatório?

Solução:

V_r: volume do reservatório $= \pi r^2 h = 3{,}14\ \text{m}^3 = 3{,}14 \cdot 1000$ litros $= 3140$ L

3140 litros $-$ 15 litros $=$ 3125 litros

3125 litros $\div$ 5 litros/min $=$ 625 min

625 min $\div\, 60 =$ 10h e 25min

36) O número máximo de latas cilíndricas de 8 cm de altura e 3 cm de raio que podem ser guardadas em uma caixa cúbica de 1 m^3 de volume, corresponde a?

Resposta: 3072

37) A Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa, relaciona-se com a sua massa m pela fórmula $A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, em que k é uma constante positiva. Considerando que no período que vai da infância até a maturidade de um indivíduo, sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

Solução:

$A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$ e $S = k \cdot (8m)^{\frac{2}{3}} = k \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}}$

Então:

$$\frac{S}{A} = \frac{k \cdot 8^{\frac{2}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}}}{k \cdot m^{\frac{2}{3}}} = 8^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4 \longrightarrow S = 4A$$

38) A magnitude de terremotos é medida numa escala denominada "Escala Richter" que possui uma pontuação de 0 a 9 graus. A magnitude em graus, nessa escala, é o logaritmo da medida da amplitude das ondas produzidas pela liberação da energia do terremoto, medidas por sismógrafos, segundo a fórmula:

$M = \log A - \log A_0$, onde M é a magnitude, A a amplitude máxima, e A_0 uma amplitude de referência.

Para calcular a energia liberada, usamos $I = \dfrac{2}{3} \log\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$, onde I varia de 0 a 9, e E é a energia liberada em kWh, e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

Perguntas:

a) Compare as magnitudes de um terremoto de 6 graus de magnitude, com outro de 8 graus de magnitude, na escala Richter.
b) Calcule a energia liberada por um terremoto de grau 6 na escala Richter.

Solução:

a) $M_1 - M_2 = (\log A_1 - \log A_0) - (\log A_2 - \log A_0)$

$6 - 8 = \log A_1 - \log A_2 \longrightarrow -2 = \log\left(\dfrac{A_1}{A_2}\right) \longrightarrow 10^{-2} = \dfrac{A_1}{A_2} \longrightarrow A_2 = 100A_1$

b) $6 = \dfrac{2}{3}\log\left(\dfrac{E}{7\cdot 10^{-3}}\right) \longrightarrow 9 = \log\left(\dfrac{E}{7\cdot 10^{-3}}\right) \longrightarrow 10^9 = \dfrac{E}{7\cdot 10^{-3}}$
$E = 7\cdot 10^6\text{kWH}$

39) (FUVEST) A soma e o produto das raízes da equação do 2º grau $(4m+3n)x^2 - 5nx + (m-2) = 0$ valem, respectivamente, 5/8 e 3/8. Calcule o valor de $m+n$.

Solução:

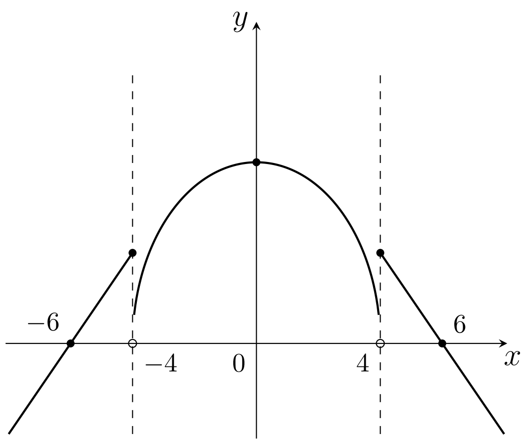
$$\frac{5n}{4m+3n} = \frac{5}{8} \text{ e } \frac{m-2}{4m+3n} = \frac{3}{8}$$
$$\frac{5n}{4m+3n} = \frac{5}{8} \longrightarrow 8n = 4m+3n \longrightarrow 5n = 4m \longrightarrow n = \frac{4}{5}m$$
$$\frac{m-2}{4m+3n} = \frac{3}{8} \longrightarrow \frac{m-2}{4m+3\cdot\frac{4}{5}m} = \frac{3}{8} \longrightarrow \frac{5m-10}{20m+12m} = \frac{3}{8}$$
$$\to \frac{5m-10}{32m} = \frac{3}{8} \to \frac{5m-10}{4m} = 3 \to 5m-10 = 12m \to m = -\frac{10}{7}$$
$$\therefore m+n = m+\frac{4}{5}m = \frac{9}{5}m = \frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{10}{7}\right) = -\frac{18}{7}$$

40) (PUC–MG) Os números "m" e "n" são raízes da equação $x^2 - 2rx + r^2 - 1 = 0$. Qual é o valor de m^2+n^2?

Solução:

$m + n = 2r$
$m \cdot n = r^2 - 1$
$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$
$(2r)^2 = m^2 + 2(r^2 - 1) + n^2$
$4r^2 - 2r^2 + 2 = m^2 + n^2$
$2(r^2 + 1) = m^2 + n^2$

41) $f(x) = \begin{cases} x + 6 & x \leq -4 \\ \sqrt{16 - x^2} & -4 < x < 4 \\ 6 - x & 4 \leq x \end{cases}$

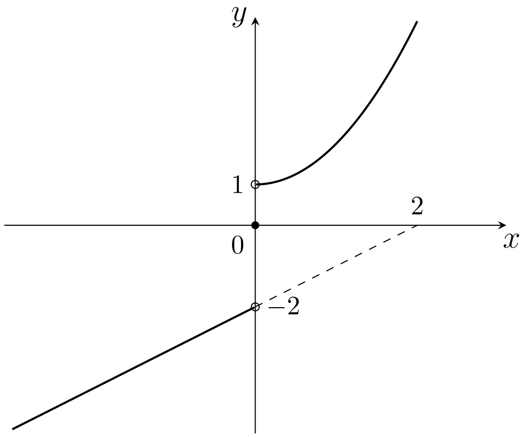


A função é descontínua em $x = -4$ e $x = 4$. Não é possível tornar contínua pois $\lim\limits_{x \to (-4)_-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to (-4)_+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 4_-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4_+} f(x)$.

42) $F(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } 0 < x \end{cases}$

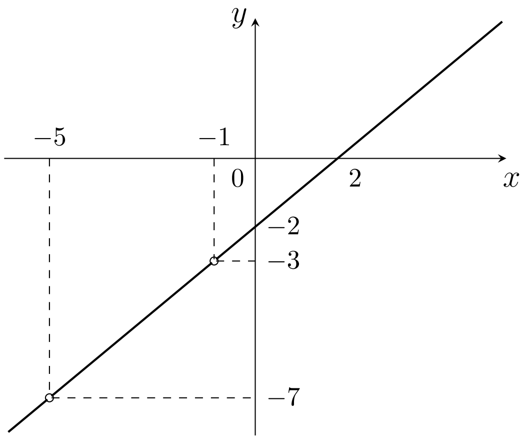
$\mathrm{D}_F = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}(F) =]-\infty, -2[\cup [2] \cup]2, +\infty[$



43) $F(x) = \dfrac{(x+1)(x^2+3x-10)}{x^2+6x+5} = \dfrac{\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x+5)}(x-2)}{\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x+5)}} = x - 2$ com

$$\begin{array}{ll} x \neq -1 & \lim\limits_{x\to -1} F(x) = -3 \\ x \neq -5 & \lim\limits_{x\to -5} F(x) = -7 \end{array} .$$



44) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$

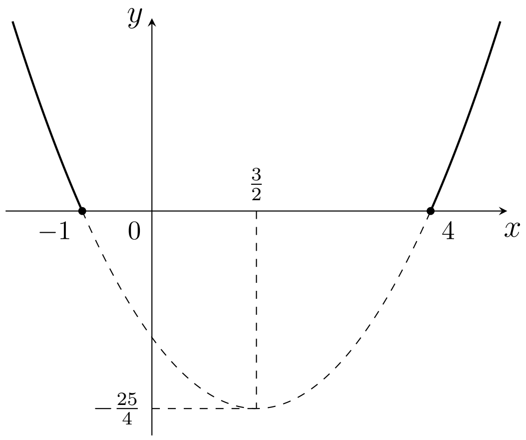
$x^2 - 3x - 4 \geq 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 \cdot x_2 = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\mathrm{D}_{f(x)} : \begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq -1 \end{array}$$

$$\boxed{x_{\min} = \frac{3}{2}}$$

$$y_{\min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9+16}{4} \implies \boxed{y_{\min} = -\frac{25}{4}}$$



Capítulo 3

Limites

Limite de uma variável

Dizemos que um ponto x_0 pertencente ou não a um conjunto D, é limite da variável x de D, se para qualquer intervalo aberto centrado em x_0, $x - x_0$ em valor absoluto, possa se tornar sempre menor do que uma quantidade qualquer. Então, a variável x terá como limite finito o número x_0, quando, fixado um número $\delta > 0$ tão pequeno quanto se queira, tenhamos:

$$x - x_0 < \delta \quad \text{ou} \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

Dizemos que x tende para x_0 (notação: $x \to x_0$) ou que o limite de x é x_0 (notação: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$).

A variável x pode tender para x_0 por valores superiores a x_0 ou por valores inferiores. Dizemos que x_0 é o limite da variável à direita ou limite à esquerda, respectivamente.

Considerando o conjunto D, o ponto x_0 com as características descritas acima, também é denominado "ponto de acumulação".

Quando o conjunto D da variável x for tal que, para M tão grande quanto se queira, tenhamos $x > M$, dizemos que o limite da variável é infinito (notação: $x \to \pm\infty$; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x \to \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x \to \mp\infty$).

3.1 Limite de Funções Reais de Variável Real

3.1.1 Limite finito

Seja uma função $y = f(x)$ definida em um intervalo (a, b) e seja x_0 um ponto de acumulação em (a, b). Dizemos que a função tem limite finito l, quando a variável tende para x_0, se para cada número ϵ positivo, existe em correspondência com ϵ, um número δ, tal que, para $0 < x - x_0 < \delta$, se tenha $f(x) - l < \epsilon$. Representamos, pela desigualdade de Cauchy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0,\, \exists \delta > 0 \,|\, x \in \mathrm{D} \bigwedge 0 < x - x_0 < \delta \implies f(x) - l < \epsilon$$

OBS: Reforçamos que x_0 pode pertencer ou não ao domínio D da função f. Entretanto, se $x_0 \in \mathrm{D}$, então $f(x_0)$ pode ser igual ou diferente de l.

Por outro lado, seja $y = f(x)$, definida em $(-\infty, +\infty)$; se a variável x tem limite infinito, y terá para limite finito o valor l, se para cada ϵ positivo, existe em correspondência com ϵ, um número M tal que, para $x > M$ se tenha $f(x) - l < \epsilon$.
Representação: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, se caso se tenha, respectivamente, x positivo ou negativo.

3.1.2 Limite infinito

Seja uma função $y = f(x)$ definida no intervalo (a, b) e x_0 pertencente ao intervalo, um ponto de acumulação. Dizemos que $y = f(x)$ tem limite infinito, quando x tem limite finito x_0, se para cada número positivo M, existe em correspondência com M, um número positivo δ tal que, para $0 < x - x_0 < \delta$ se tenha $f(x) > M$.
Representação: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, conforme $f(x)$ tenda para infinito por positivos ou negativos.

Por outro lado, seja uma função $y = f(x)$ definida em $(-\infty, +\infty)$. Dizemos que a função tem limite infinito, quando a variável x também tem limite infinito, se para cada M existe em correspondência com M, um número M_1, tal que, para $x > M_1$ se tenha $f(x) > M$.
Representação: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$.

3.1.3 Propriedades Fundamentais dos Limites

1) O limite de uma constante é a própria constante.

2) Uma função uniforme $y = f(x)$ não pode ter dois limites distintos num mesmo ponto.

3) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$, a função $f(x)$ tem o mesmo sinal de l para $l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon$; $(\epsilon > 0)$.

4) Se duas funções $f(x)$ e $g(x)$ têm valores iguais para $0 < x - x_0 < \delta$, $(\delta > 0)$, se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, então, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

5) Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $\varphi(x)$ funções de x definidas em (a,b) e x_0 um ponto de (a,b), se

(I) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$

e

(II) $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$

para todo ponto de (a,b), diferente de x_0, então: $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = l$.

Símbolos de indeterminação:

$$\infty - \infty\,; \quad \infty \times 0\,; \quad \frac{0}{0}\,; \quad \frac{\infty}{\infty}\,; \quad \infty^0; \quad 0^0 \quad \text{e} \quad 1^{\pm\infty}$$

<u>Exemplos:</u>

1) $s = x^2 + x;\ t = x^2 + 1 \therefore \lim\limits_{x\to\infty}(s+t) = \infty + \infty = \infty$

2) $s = 2;\ t = -x;\ \lim\limits_{x\to\infty} s + t = 2 - \infty = -\infty$

3) $s = x^2 + x + 1;\ t = x - 5 \therefore \lim\limits_{x\to\infty} s \times t = +\infty \times +\infty = +\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2}}{x+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{\infty} = 0$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{0}{0}$ mas $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = x \therefore \lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x + 1)^\pi = +\infty^\pi$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x = 0^{+\infty} = 0$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{-x} = 0^{-\infty} = +\infty$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\sqrt{2}} = 0^{-\sqrt{2}} = +\infty$

OBSERVAÇÃO:

Denomina-se função algébrica racional inteira, função polinomial ou polinômio, à expressão abaixo, com n positivo, e $a_n \neq 0$.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

De acordo com limites, o limite da função algébrica racional inteira, $f(x)$, quando $x \to a$, é $f(a)$, ou seja, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

O limite da função racional inteira $f(x)$, quando $x \to \infty$, é igual ao limite do termo de mais alto valor $f(x)$.

Demonstração. Colocando $a_n x^n$ em evidência, fica:

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

A expressão entre parênteses tende para 1, então:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} a_n x^n$$

Exemplo:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 - 5x + 9 = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 + 7x - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

3.1.4 Limite de uma função racional:

Assim como as funções polinomiais, funções racionais são casos particulares das funções algébricas, as quais envolvem as operações algébricas (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação).

Seja $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ uma função racional, na qual $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios racionais inteiros. Então:

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = g(a) \neq 0 \implies \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$.

Exemplo:

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 3x + 5}{x^2 - 2x - 8} = \dfrac{1+3+5}{1-2-8} = -1$

Caso haja indeterminação no ponto:

Forma indeterminada: $\frac{0}{0}$

Se $f(a) = g(a) = 0$, teremos $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$.

Se dividirmos ambos os membros por $(x - a)$, obtendo $f_1(x)$ e $g_1(x)$ como quocientes, temos:

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = \dfrac{f_1(a)}{g_1(a)}$.

Caso $f_1(a) = g_1(a) = 0$ devemos dividir $f_1(a) = g_1(a) = 0$ por $x-a$, achando o limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}$, e assim sucessivamente.

Exemplo:
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-4x+2}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{0}{0}$, mas $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-4x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x+1)(x-1)} =$
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{2} = 1$

Forma indeterminada: $\frac{\infty}{\infty}$
Seja obter $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \dfrac{\infty}{\infty}$

Para eliminar a indeterminação, fazemos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \times \frac{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\cdot\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\cdot\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_{m-1}}{b_m}\cdot\frac{1}{x} + \frac{b_{m-2}}{b_m}\cdot\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{b_1}{b_m}\cdot\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m}\cdot\frac{1}{x^m}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Quando $x \to \pm\infty$, temos: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} \cdot 1 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n x^n}{b_m x^m} =$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m}$

Temos três casos possíveis:

i) Caso $n = m$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_n}$

ii) Caso $n < m$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_n m} \cdot x^{m-n} = 0$

iii) Caso $n > m$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_n m} \cdot x^{m-n} = \pm\infty$

Neste caso, podemos escrever que f tem limite $\dfrac{a_n}{b_m}$ no infinito, ou seja:
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_m}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a_n}{b_m}$

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^3+2x-1}{x^3-3x^2+7} = \dfrac{5x^3}{x^3} = \dfrac{5}{1} = 5$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x+2}{3x^3+2x^2+3x+5} = \dfrac{x^2}{3x^3} = \dfrac{1}{3x} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^5+2x-3}{-2x^3+x^2+3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{-2} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+8}{3x^2+5x+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^6+2x^2+2}{x^4-x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

6) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^5+x}{2x^4+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x}{2} = -\infty$

3.1.5 Alguns limites fundamentais:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Verifica-se que a razão $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, tende para a unidade, quando x se aproxima de zero.

Demonstração. Considerando a figura , seja x o ângulo central AOP no círculo unitário ($r =$ unidade).

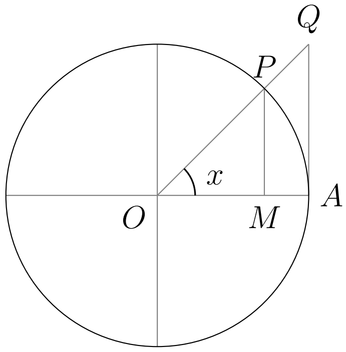
Então:

- O arco $AP = x$, e o setor $OAP = \frac{1}{2}x$;
- A desigualdade $\Delta OMP <$ setor $OAP < \Delta OAQ$ é equivalente a: $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cdot \cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$.

Dividindo por $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$, temos: $\cos x < \dfrac{x}{\operatorname{sen} x} < \dfrac{1}{\cos x} \implies \dfrac{1}{\cos x} > \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$.

Quando x tende a zero, tanto $\cos x$ como $\frac{1}{\cos x}$ tendem ao limite, que é 1, e portanto, como $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ está compreendido entre ambos, podemos afirmar que:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$



2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = 0$

Da trigonometria, temos a expressão: $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{x}{2}$.

Então, $\dfrac{1 - \cos x}{x} = \dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x} = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \dfrac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$.

Quando x tende a zero, $\dfrac{x}{2}$ e $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$ também tendem a zero, e portanto, pela dedução do item (1) anterior, $\dfrac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}$ tende ao limite 1.

Então, podemos concluir que: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$.

3) Número e (dado):

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$$

$e = 2,71828$ base do sistema dos logaritmos naturais (logaritmos neperianos).

Exemplos:

1) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$; realmente, fazendo $x = \dfrac{1}{z}$, quando $x \to 0$, $z \to \infty$

$$\therefore \lim_{z \to \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{k}{x}\right)^x = e^k$; k real relativo.

Demonstração. Fazendo $\dfrac{k}{x} = z$, temos $x = \dfrac{k}{z}$; quando $x \to \infty$, $z \to 0$

$\therefore \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{k}{z}} = \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}^k}$.

Mas, $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e \implies \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}^k} = e^k$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{k}{x}\right)^x = e^{-k} = \dfrac{1}{e^k}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+k} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^k = e\cdot 1 = e$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$; fazer $x = u+1$; quando $x\to 1$, $u\to 0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln u+1}{u} = 1$, de acordo com o exemplo (5), acima.

7) Mostre que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

Verificamos que a expressão representa uma indeterminação, pois,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$; (indeterminação)

Fazendo $a^x = 1+\dfrac{1}{x} \implies x = \log_a\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \implies \dfrac{a^x-1}{x} = \dfrac{1+\frac{1}{x}-1}{\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{\frac{1}{x}}{\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{x\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)}$; ou $\dfrac{a^x-1}{x} = \dfrac{1}{\log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$;

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \dfrac{1}{\ln e}$ pois, quando $x\to 0$, $n\to\infty$

Mas, $\log_a e \times \ln a = 1 \therefore \log_e a = \dfrac{1}{\log_a e} = \ln a \implies \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$

3.1.6 Limite de uma função à direita de um ponto

Seja $y = f(x)$, definida em (a,b) e x_0 um ponto de (a,b). Diz-se que $f(x)$ tem limite à direita, l, quando a variável x tem limite à direita, x_0, se para cada ϵ positivo, existe em correspondência com ϵ, um número positivo δ tal que, para $x_0 < x < x_0+\delta$, se tenha $f(x) - l < \epsilon$.
Representação: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$

Exemplo: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{5} \cdot x} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

3.1.7 Limite de uma função à esquerda de um ponto

Seja $y = f(x)$ definida em (a, b) e x_0 um ponto de (a, b). Diz-se que $f(x)$ tem um limite à esquerda, l, quando a variável x tem limite à esquerda, x_0, se para cada ϵ positivo, existe, em correspondência com ϵ, um número positivo δ, tal que, para $x_0 - \delta < x < x_0$, se tenha $f(x) - l < \epsilon$.
Representação: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l$

OBS: os limites laterais, ou seja, limite à esquerda e limite à direita, podem ser distintos ou não. É condição necessária e suficiente para que exista o $\lim f(x)$ num ponto, que os limites existam e sejam iguais.

3.1.8 Função contínua

Diz-se que uma função $y = f(x)$, definida em (a, b) é contínua em um ponto x_0 de (a, b), se:

i) existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, e é finito;

ii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Diz-se que $f(x)$ definida em (a, b) é contínua nesse intervalo, se for contínua em todos os pontos de (a, b).
Resumo: Uma função $f(x)$ diz-se descontínua em um ponto a, se ao menos uma das condições abaixo não forem satisfeitas:

i) $f(x)$ é definida em a

ii) Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ e é finito

iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exercícios:

1) Determinar os limites, sendo n inteiro e positivo:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n-1}{n+2}$

Solução: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n-1}{n+2} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+3}$

Solução: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right)$

Solução: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}\right) \times \dfrac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 \times \dfrac{1}{\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \dfrac{1}{x}$

Solução: $\lim\limits_{x\to 0} x \cdot \dfrac{1}{x} = \text{zero} \ \times \ \text{número entre} \ -1 \text{ e } +1 = 0$

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{2x}}$

Solução: $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{2x}} = e^{-\infty} = 0$

f) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{2x}}$

Solução: $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{2x}} = e^{+\infty} = \infty$

g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x}$

Solução: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x}$

Solução: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x} = -\dfrac{x}{x} = -1$

i) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{3}}{x-3}$

Solução: $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{3}}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{3}} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{3}} \times \dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{3}\sqrt{x} + \sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{\sqrt[4]{3} + \sqrt[4]{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{2\sqrt[4]{32}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{4 \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{4 \cdot 3^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{3^3}} \times \dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}} = \dfrac{\sqrt[4]{3}}{12}$

2) Sejam A_n a área e p o perímetro de um polígono regular de n lados. Se n cresce e p permanece constante, achar $\lim_{n\to\infty} A_n$.

Solução:

$A_n = \pi r^2$; $p = 2\pi r \implies r = \dfrac{p}{2\pi}$

Então, a área em função do perímetro, vale:

$A_n = \pi \dfrac{p^2}{4\pi^2} = \dfrac{p^2}{4\pi}$

3) O segmento de reta AB de comprimento l é dividido em n partes iguais; constroem-se sobre cada parte, como na figura, triângulos equiláteros. Se S_n é a soma dos perímetros, achar $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Solução: Os valores de l e n, estão relacionados à figura abaixo.

Para $n = 1$, temos $S_1 = 1 \times \dfrac{3l}{1} = 3l$

Para $n = 2$, temos $S_2 = 2 \times \dfrac{3l}{2} = 3l$

Para $n = 3$, temos $S_3 = 3 \times \dfrac{3l}{3} = 3l$

...

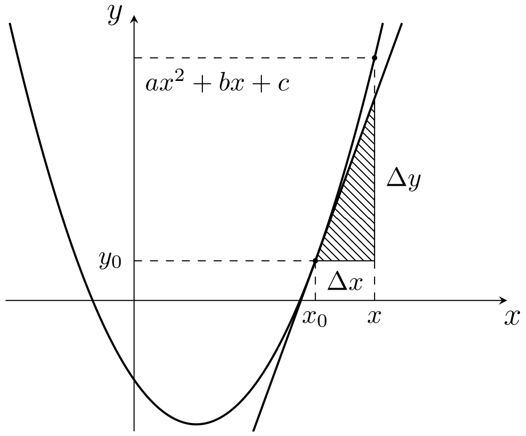
Conclusão: $\lim_{n\to\infty} S_n = 3l$

Capítulo 4

Derivadas

O problema das tangentes a gráficos.

A tangente (geométrica) ao gráfico a função $y = ax^2+bx+c$, no ponto (x_0, y_0), é a reta que passa por (x_0, y_0), com inclinação $I_{x_0} = \lim_{x\to x_0} m_x$, onde m_x é a inclinação (tangente trigonométrica) da reta secante, pelos pontos (x_0, y_0) e $(x, ax^2 + bx + c)$, com $(x \neq x_0)$. Veja a representação no gráfico abaixo:

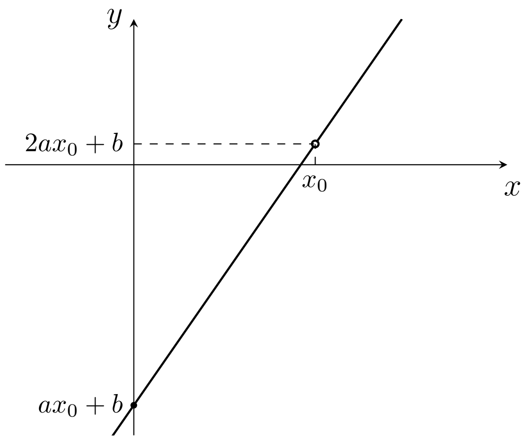


$$
\begin{aligned}
m_x &= \frac{ax^2 + bx + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{x - x_0}, \; x \neq x_0 \\
&= \frac{ax^2 - ax_0^2 + b(x - x_0)}{x - x_0}, \; x \neq x_0 \\
&= a(x + x_0) + b, \; x \neq x_0 \\
&= ax + ax_0 + b, \; x \neq x_0
\end{aligned}
$$

Quando $x \to x_0$, teremos, no limite:

$$y = 2ax_0 + b$$

O gráfico de $y = m_x$, é uma reta faltando um ponto:



Teorema 4.0.1. *Seja (x, y) um ponto do gráfico de $y = ax^2 + bx + c$. Então, a inclinação da tangente ao gráfico, em (x, y) é:*

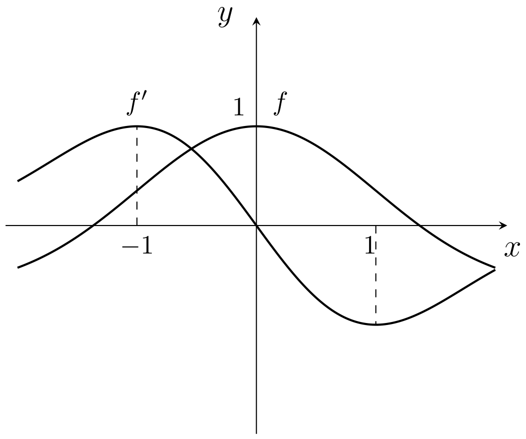
$$I_x = 2ax + b$$

Resumo do conceito de derivada de uma função:

Para cada x da função $f(x)$, o valor de $f'(x)$, é a inclinação da tangente (geométrica) ao gráfico de $f(x)$. A função $f'(x)$ é a derivada de $f(x)$, ou seja:

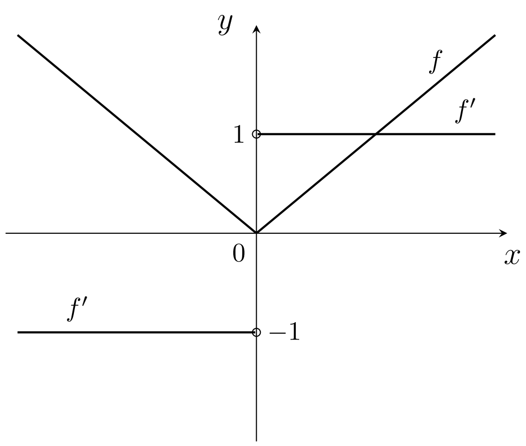
$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Exemplo: Traçar o gráfico aproximado (visual) da derivada da função abaixo
em $x = 0$, $f'(0) = 0$
em $x = 1$, $f'(1) = -1$
em $x = -1$, $f'(-1) = 1$
para $x > 0$, $f'(x) < 0$
para $x < 0$, $f'(x) > 0$

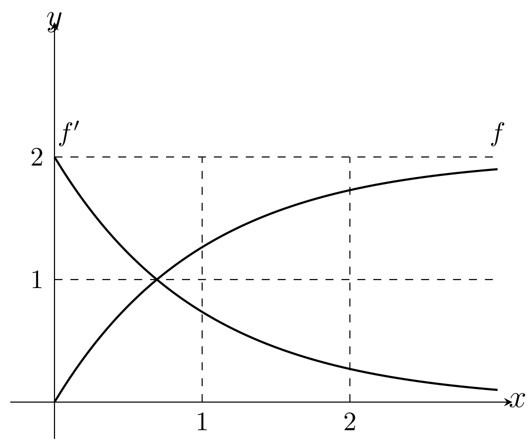


OBS:

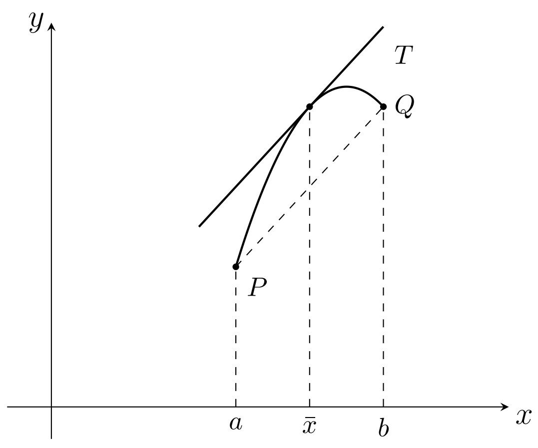
a) A derivada só é definida num ponto x_0 quando $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ tende para o mesmo valor, quando x se aproxima de x_0 tanto pela direita como pela esquerda. Então, no caso abaixo, a função $f(x) = x$ não tem derivada em $x = 0$. Portanto, o Domínio da função $f'(x)$, ou seja, $\mathrm{D}_{f(x)}$, não contém o ponto zero.

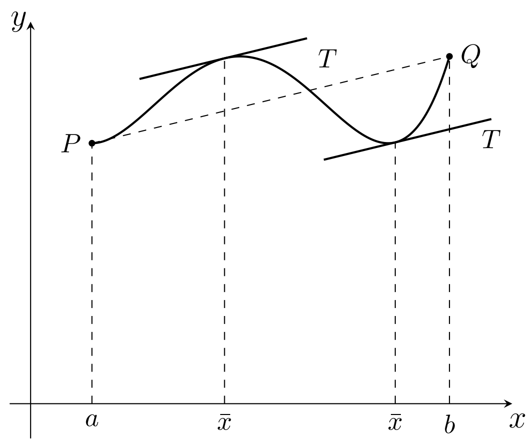


b) O Domínio de f' é o conjunto de todos os números x para os quais a função original apresenta uma tangente não vertical.



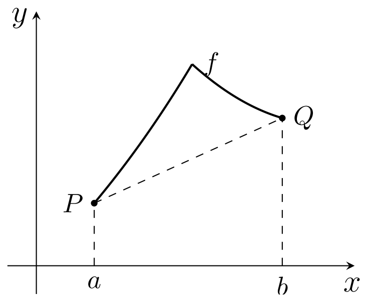
Teorema 4.0.2 (Teorema do valor médio)**.** *Toda corda ligando dois pontos de uma função diferenciável, é paralela à tangente em algum ponto intermediário.*





$$f(\bar{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

OBS:



A função f não é diferenciável em $[a, b]$.

4.1 Processo de Diferenciação

Seja Df a derivada de $f \to \mathrm{D}f = f'$.

Seja $h(x) = f(x) + g(x) \to \mathrm{D}(f + g) = h'$.

Então: $\mathrm{D}(x^2 + 2x + 5) = 2x + 2$.

Quando afirmamos que f é diferenciável, estamos dizendo que f tem uma derivada em cada ponto de seu domínio.

Teorema 4.1.1. *A derivada da função constante vale zero.*
Sendo k, uma constante, $\mathrm{D}k = 0$.

Demonstração. $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{k - k}{x - x_0} = 0$

Teorema 4.1.2. *Se f é diferenciável, então kf também será, para todo k.*
$\mathrm{D}(kf) = k\mathrm{D}f$

Demonstração. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \to \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{kf(x) - kf(x_0)}{x - x_0} = kf'(x_0)$

Exemplo: $\mathrm{D}(kx^2) = 2kx$

Teorema 4.1.3. *Se f e g são diferenciáveis, então $f + g$ também é diferenciável e:* $\mathrm{D}(f + g) = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g$

Demonstração. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{[f(x) + g(x)] - [f(x_0) + g(x_0)]}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$

Teorema 4.1.4. $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$ *para todo* n *inteiro positivo.*

Para a demonstração do teorema, utilizaremos a igualdade abaixo:

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})$$

Demonstração. Seja $f(x) = x^n$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\to f'(x_0) = nx_0^{n-1} \to \mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$$

Teorema 4.1.5. *Se* f *é diferenciável em* x_0*, então* f *é contínua em* x_0*, ou seja,* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*.*

Teorema 4.1.6. *A derivada do produto de duas funções, é a derivada da primeira multiplicada pela segunda função, adicionada à primeira multiplicada pela derivada da segunda.*

$$\mathrm{D}(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (f \cdot g)' &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x) + [g(x) - g(x_0)]f(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

Teorema 4.1.7. *Derivada da função recíproca* $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$*:*

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{f(x) \cdot f(x_0) \cdot (x - x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{-1}{f(x) \cdot f(x_0)} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow g'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{D}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-f'}{f^2}, \text{com } f(x) \neq 0$$

Teorema 4.1.8. *Derivada do quociente de duas funções diferenciáveis:*

$$\mathrm{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Demonstração. $\mathrm{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathrm{D}(f) \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \mathrm{D}\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{f'}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Teorema 4.1.9. *Se n é um inteiro positivo, e f é uma função diferenciável, então $\mathrm{D}(f^n) = nf^{n-1}f'$.*

Demonstração. Seja $g(x) = f^n(x)$

$$\begin{aligned}
g'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f^n(x) - f^n(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - f(x_0)] \cdot [f^{n-1}(x) + f^{n-2}(x)f(x_0) + \ldots + f^{n-1}(x_0)]}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} [f^{n-1}(x) + f^{n-2}(x)f(x_0) + \ldots + f^{n-1}(x_0)] \\
\Longrightarrow & g'(x_0) = nf^{n-1}(x_0) \cdot f'(x_0)
\end{aligned}$$

OBS: Caso n seja negativo ($n = -k$, com $k > 0$), a mesma fórmula será válida, em todos os pontos onde $f(x) \neq 0$.

$$\mathrm{D}(f^n) = \mathrm{D}(f^{-k}) = \mathrm{D}\left(\frac{1}{f^k}\right) = -kf^{k-1} \cdot \frac{f'}{f^{2k}} = -kf^{-k-1}f' = nf^{n-1}f'$$

Resumo:

(a) $\mathrm{D}k = 0$

(b) $\mathrm{D}(kf) = k\mathrm{D}f$

(c) $\mathrm{D}(f + g) = \mathrm{D}f + \mathrm{D}g$

(d) $\mathrm{D}x^n = nx^{n-1}$

(e) $\mathrm{D}(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$

(f) $\mathrm{D}\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-f}{f^2}$, $(f \neq 0)$

(g) $\mathrm{D}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$, $(g \neq 0)$

(h) $\mathrm{D}f^n = nf^{n-1}f'$

(i) $\mathrm{D}\sqrt{f} = \mathrm{D}f^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}f^{\frac{1}{2}-1}f' = \frac{1}{2}f^{-\frac{1}{2}}f' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

<u>Exemplos:</u>

1) $\mathrm{D}(7x^{10} - x^8) = 70x^9 - 8x^7$

2) $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

3) $\mathrm{D}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

4) $\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = \dfrac{-(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

5) $\mathrm{D}\left(\dfrac{y}{y^3-3}\right) = \dfrac{1 \cdot (y^3-3) - y \cdot (3y^2)}{(y^3-3)^2} = \dfrac{y^3 - 3 - 3y^3}{(y^3-3)^2} = \dfrac{-2y^3-3}{(y^3-3)^2}$

6) $\mathrm{D}(7y^4 - y^2 + \pi) = 28y^3 - 2y$

7) $\mathrm{D}_x(x^3y + ay^3 + xy^2) = 3x^2y + y^2$

8) $\mathrm{D}_y(x^3y + ay^3 + xy^2) = x^3 + 3ay^2 + 2xy$

9) $\mathrm{D}_a(x^3y + ay^3 + xy^2) = y^3$

10) $\mathrm{D}[(x^2-x+1)(x^2+x+1)] = (2x-1)(x^2+x+1) + (x^2-x+1)(2x+1)$

11) $\mathrm{D}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right) = \dfrac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$

12) $\mathrm{D}\left(\dfrac{x+1}{x^3-x}\right) = \dfrac{1 \cdot (x^3-x) - (x+1)(3x^2-1)}{(x^3-x)^2} = \dfrac{-2x^3-3x^2+1}{(x^3-x)^2}$

13) $\mathrm{D}[(x^2+x)^2] = \mathrm{D}(x^4 + 2x^3 + x^2) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$

Exercícios resolvidos:

1) Calcule por qualquer método:

a) $\mathrm{D}\sqrt{(x+1)(x+2)}$

Solução:

$$\mathrm{D}\sqrt{(x+1)(x+2)} = \mathrm{D}[(x+1)(x+2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}[(x+1)(x+2)]^{\frac{1}{2}-1} \cdot [1 \cdot (x+2) + (x+1) \cdot 1]$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}} \cdot (2x+3)$$
$$= \frac{2x+3}{2\sqrt{(x+1)(x+2)}}$$

b) $\mathrm{D}\left(\dfrac{x}{(x^2+2x+1)^2}\right)$

Solução:

$$\mathrm{D}\left(\frac{x}{(x^2+2x+1)^2}\right) = \mathrm{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$= \frac{1 \cdot (x^2+2x+1)^2 - x \cdot 2 \cdot (x^2+2x+1)(2x+2)}{(x^2+2x+1)^4}$$
$$= \frac{(x+1)^4 - 2x(2x+2)(x+1)^2}{(x+1)^8}$$
$$= \frac{(x+1)^4 - 4x(x+1)^3}{(x+1)^8} = \frac{(x+1) - 4x}{(x+1)^5}$$
$$= \frac{-3x+1}{(x+1)^5}$$

c) $\mathrm{D}(x^3+x^2-x+7)^{712}$

Solução:

$$\mathrm{D}(x^3+x^2-x+7)^{712} = 712(x^3+x^2-x+7)^{711} \cdot (3x^2+2x-1)$$

d) $\mathrm{D}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$

Solução:

$$\mathrm{D}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \mathrm{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$= \frac{2x \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

e) $\mathrm{D}\sqrt{\sqrt{x}}$

Solução:

$$\mathrm{D}\sqrt{\sqrt{x}} = \mathrm{D}\sqrt{f} = \frac{f'}{2\sqrt{f}},\ \text{onde } f = \sqrt{x}$$

$$\mathrm{D}\sqrt{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}}} = \frac{1}{4\sqrt{\sqrt{x^3}}}$$

f) $\mathrm{D}\operatorname{sen} x$

Solução:

Dando a x um incremento Δx, temos:

$\Delta y = (y + \Delta y) - y = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$,

OBS: $\operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen}(a - b) = 2\operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$a + b = x + \Delta x$

$a - b = x$

$\Rightarrow a = x + \frac{\Delta x}{2}$ e $b = \frac{\Delta x}{2}$

$\Rightarrow \Delta y = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{D}\operatorname{sen} x = \cos x$, ou $y' = \cos x$

4.2 Regra da Cadeia (Derivada de Função de Função)

Sejam as funções f e g, e a função $f(g)$.

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{D}f(g) = f'(g)g'}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta g}{\Delta g}$$

$$= \underbrace{\frac{\Delta f}{\Delta g}}_{f'_g}\cdot\underbrace{\frac{\Delta g}{\Delta x}}_{g'_x}$$

<u>Exemplo:</u> Calcule as derivadas.

1) $\phi(x) = \operatorname{sen}(3x+1)$

Expressamos como uma função composta:

$$\phi(x) = f\big(g(x)\big)$$

com $f(u) = \operatorname{sen} u \qquad f'(u) = \cos u$

$u = g(x) = 3x+1 \qquad g'(x) = 3$

$\Longrightarrow\ \phi(x) = \mathrm{D}\operatorname{sen}(3x+1) = [\cos(3x+1)]\mathrm{D}(3x+1) = 3\cos(3x+1)$

2) $y = \sqrt{2x-5}$

$y = \sqrt{u}$ com $u = 2x-5$

$\Longrightarrow\ y'_x = y'_u\cdot u'_x \ \Longrightarrow\ y' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u' = \dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{2x-5}}\cdot\cancel{2}$

$\Longrightarrow\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}$

3) $y = \operatorname{sen} 4x$

$y = \operatorname{sen} u$ com $u = 4x$

$\Longrightarrow\ y' = (\operatorname{sen} u)'\cdot u'_x = \cos u\cdot u'_x = \cos 4x\cdot 4$

$\Longrightarrow\ y' = 4\cos 4x$

4) $y = \dfrac{1}{\cos x}$

$y = \dfrac{1}{u}$ com $u = \cos x$

$\Longrightarrow\ y' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'_x = -\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot(-\operatorname{sen} x)$

$\Longrightarrow\ y' = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

5) $y = \operatorname{sen}^2 x$

$y = u^2$ com $u = \operatorname{sen} x$

$\Longrightarrow\ y' = 2u \cdot u'_x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

$\Longrightarrow\ y' = \operatorname{sen} 2x$

6) $y = \operatorname{sen}^3 x$

$y = u^3$ com $u = \operatorname{sen} x$

$\Longrightarrow\ y' = 3u^2 \cdot u'_x$

$\Longrightarrow\ y' = 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$

7) $y = e^{-3x}$

$y = e^u$ com $u = -3x$

$\Longrightarrow\ y' = e^u \cdot u'_x = e^{-3x} \cdot (-3)$

$\Longrightarrow\ y' = -3e^{-3x}$

8) $y = \log(1 - 4x)$

$y = \log u$ com $u = 1 - 4x$

$$\Longrightarrow\ y' = \frac{1}{u} \cdot u'_x = \frac{1}{1-4x} \cdot (-4)$$

$$\Longrightarrow\ y' = \frac{4}{4x-1}$$

9) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$

$y = \operatorname{tg} u$ com $u = \frac{1}{x}$

$$\Longrightarrow\ y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow\ y' = \frac{-1}{x^2 \cdot \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Generalização:

Seja $y = f(u)$ com $u = \varphi(v)$, $v = g(z)$, $z = h(t)$ e $t = j(x)$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

$$\Longrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \ldots$$

$$\Longrightarrow \boxed{y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_z \cdot z'_t \cdot t'_x}$$

<u>Exemplos:</u>

1) $y = \operatorname{tg}^2\left(\frac{1}{x}\right)$

$$y = u^2 \text{ onde } \begin{cases} u = \operatorname{tg}\frac{1}{x} = \operatorname{tg} v \\ v = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{-1}{x^2} = 2\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow y' = -\frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 \cdot \cos^3\left(\frac{1}{x}\right)}$$

2) $y = \log\sqrt{1-4x^2}$

$$y = \log u \text{ com } \begin{cases} u = \sqrt{1-4x^2} = \sqrt{v} \\ v = 1-4x^2 \end{cases}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot (-8x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot (-4x)$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{-4x}{1-4x^2}$$

3) $y = \sqrt{(\operatorname{sen}^3 x - 1)^3}$

$$y = \sqrt{u} \text{ com } \begin{cases} u = (\operatorname{sen}^3 x - 1)^3 = v^3 \\ v = \operatorname{sen}^3 x - 1 = z^3 - 1 \\ z = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_z \cdot z'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 3v^2 \cdot 3z^2 \cdot \cos x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(\operatorname{sen}^3 x - 1)^3}} \cdot 3(\operatorname{sen}^3 x - 1)^2 \cdot 3\operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$$

$$\Longrightarrow\ y' = \tfrac{9}{2}\,\mathrm{sen}^2 x \cos x \sqrt{\mathrm{sen}^3 x - 1}$$

4) $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-4x^2}\right)$

$$y = \operatorname{arctg} u \ \text{ com } \begin{cases} u = \frac{1}{1-4x^2} = \frac{1}{v} \\ v = 1-4x^2 \end{cases}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{-1}{v^2} \cdot (-8x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1-4x^2}\right)^2} \cdot \frac{8x}{(1-4x^2)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(1-4x^2)^2}}{(1-4x^2)^2+1} \cdot \frac{8x}{\cancel{(1-4x^2)^2}}$$

$$\Longrightarrow\ y' = \frac{8x}{(1-4x^2)^2+1}$$

5) $y = \mathrm{sen}^3(4x)$

$$y = u^3 \ \text{ com } \begin{cases} u = \mathrm{sen}\,(4x) = \mathrm{sen}\, v \\ v = 4x \end{cases}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 4 = 12\,\mathrm{sen}^2(4x)\cos(4x)$$

6) $y = e^{\,\mathrm{sen}\,(2x)}$

$$y = e^u \ \text{ com } \begin{cases} u = \mathrm{sen}\,(2x) = \mathrm{sen}\, v \\ v = 2x \end{cases}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = e^u \cdot \cos v \cdot 2 = 2e^{\,\mathrm{sen}\,(2x)}\cos(2x)$$

4.3 Derivadas de Funções Implícitas

Uma função da forma $y = f(x)$ é dita *explícita* quando y está de um lado do sinal "=" e x do outro lado.

Uma função *implícita* apresenta-se sob forma:

$$f(x,y) = 0$$

onde x é a variável independente e y a função.

Exemplos:

a) $2x^2y - \dfrac{x}{y^2} = 0$

b) $x^2 + y^2 - R^2 = 0$

c) $4x^2 - 2xy - y^2 - 5y - 1 = 0$

Calculemos as derivadas:

a) Derivando $2x^2y - \frac{x}{y^2} = 0$ em relação a x:

$$[2 \cdot (2x) \cdot y + 2x^2 \cdot y'] - \left[\frac{1}{y^2} \cdot 1 + x \cdot \frac{-2}{y^3} \cdot y'\right] = 0$$

$$4xy + 2x^2y' - \frac{y - 2xy'}{y^3} = 0$$

$$4xy^4 + 2x^2y^3y' - y + 2xy' = 0$$

$$y'(2x^2y^3 + 2x) = y(1 - 4xy^3)$$

$$y' = \frac{y(1 - 4xy^3)}{2x(xy^3 + 1)}$$

b) Derivando $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ em relação a x:

$$2x + 2y \cdot y' - 0 = 0$$

$$2yy' = -2x$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Neste caso, a equação proposta poderia ser colocada sob a forma explícita:

$y^2 = R^2 - x^2$ e $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\implies y' = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}$$

c) Derivando $4x^2 - 2xy - y^2 - 5y - 1 = 0$ em relação a x:

$$4 \cdot (2x) - [2 \cdot 1 \cdot y + 2x \cdot y'] - 2y \cdot y' - 5 \cdot y' - 0 = 0$$

$$8x - 2y + 2xy' - 2yy' - 5y' = 0$$

$$y'(2x - 2y - 5) = 2(y - 4x)$$

$$y' = \frac{2(y - 4x)}{2(x - y) - 5}$$

4.4 Aplicações das Derivadas

As derivadas nos auxiliam a determinar:

- Se uma função tem máximo ou mínimo;
- Se uma curva, em um ponto qualquer, tem tangente horizontal, vertical ou inclinada, o que dá a posição da curva neste ponto;

- Se uma curva tem concavidade voltada para cima ou para baixo em relação ao eixo das abscissas;
- Se a curvatura em um ponto é grande ou pequena, etc.

4.4.1 Traçar curvas; Pesquisa de Máximos e Mínimos

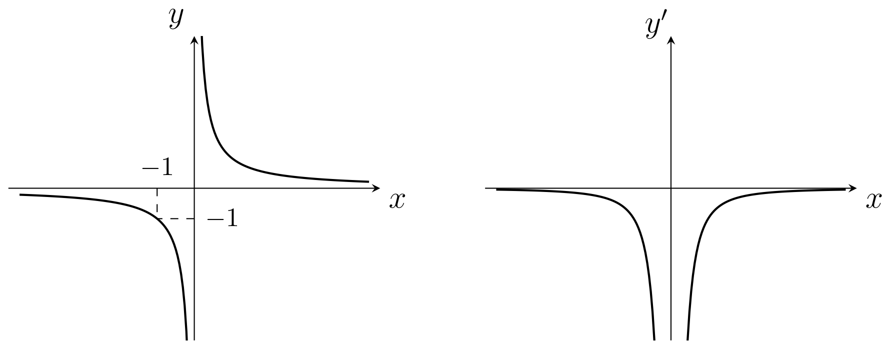
1) Inclinação de uma curva em um ponto.

$\boxed{y' = \operatorname{tg} \alpha}$

$$\begin{array}{lll} \text{Se} & y' > 0 & \Longrightarrow \text{ângulo agudo} \\ & y' < 0 & \Longrightarrow \text{ângulo obtuso} \\ & y' = 0 & \Longrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \pi \\ & y' = \infty & \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

<u>Exemplo:</u> $y = \dfrac{1}{x}$; $y' = -\dfrac{1}{x^2}$

$$\begin{array}{lllll} \text{Se} & x = 0 & y' = -\infty & & \text{a tangente é vertical} \\ & x = \infty & y' = 0 & & \text{a tangente é horizontal} \\ & x = -1 & y' = -1 = \operatorname{tg}\alpha & \Longrightarrow & \alpha = 135^{\circ} \end{array}$$



2) Variação de uma função.

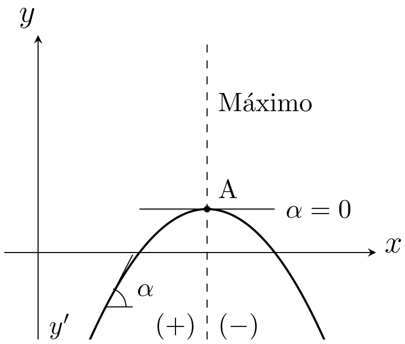
Teorema 4.4.1. *Se a derivada é positiva a função cresce. Se a derivada é negativa, a função decresce.*

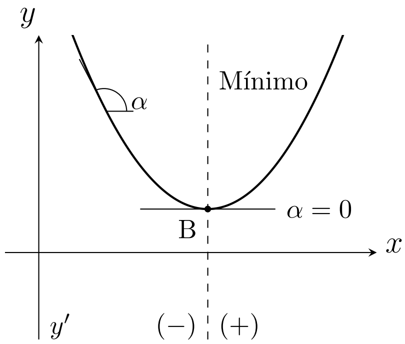
<u>Exemplo:</u> No caso $y = \dfrac{1}{x}$; $y' = -\dfrac{1}{x^2}$

y' é sempre negativa $\Longrightarrow$ y sempre decresce.

3) Determinação de *máximos* e *mínimos*.

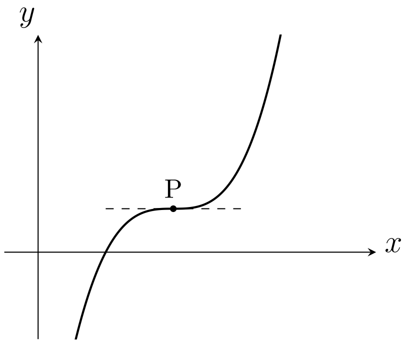
Teorema 4.4.2. *Quando uma função $y = f(x)$ passa por um mínimo ou por um máximo, sua derivada anula-se, mudando de sinal. E vice-versa.*

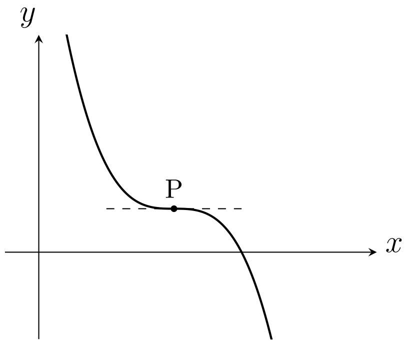




4) Pontos de inflexão.

Exemplo: $y = (x-2)^3 + 1$ e $y = -(x-2)^3 + 1$





A tangente é horizontal nestes pontos mas a derivada não muda de sinal. Apenas a curvatura muda de sinal.

OBS: Há também pontos de inflexão onde a tangente não é horizontal.

Máximo ou mínimo?

Primeira Regra:

Máximo quando y' é $(+)$ antes de anular-se e $(-)$ depois.

Mínimo quando y' é $(-)$ antes de anular-se e $(+)$ depois.

Exemplos:

1) $y = x^2 - 5x + 6 \implies y' = 2x - 5 = 0 \implies \boxed{x = \dfrac{5}{2}}$

Para $x < \frac{5}{2}$ por exemplo $0 \implies y' < 0 \implies y \searrow$

Para $x > \frac{5}{2}$ por exemplo $3 \implies y' > 0 \implies y \nearrow$

Portanto: y tem **mínimo** em $x = \frac{5}{2}$.

2) $y = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ ou $y = (1-4x^2)^{-\frac{1}{2}} = u^{-\frac{1}{2}}$

$y' = -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}u' = -\frac{1}{2}(1-4x^2)^{-\frac{3}{2}}(-8x)$

$y' = \frac{4x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}} = 0 \implies 4x = 0 \implies \boxed{x = 0}$

Para $x < 0 \implies y' < 0 \implies y \searrow$

Para $x > 0 \implies y' > 0 \implies y \nearrow$

Portanto y tem **mínimo**.

3) $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \implies y = \frac{1}{u} \implies y' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

$y' = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \cos x = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$

$\implies \cos x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$

Haverá um máximo ou um mínimo:

Para $x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x > 0 \implies y' < 0 \implies y \searrow$

Para $x > \frac{\pi}{2}$, $\cos x < 0 \implies y' > 0 \implies y \nearrow$

$\implies$ Temos **mínimo** de y para $x = \frac{\pi}{2}$

Para $x < \frac{3\pi}{2}$, $\cos x < 0 \implies y' > 0 \implies y \nearrow$

Para $x > \frac{3\pi}{2}$, $\cos x > 0 \implies y' < 0 \implies y \searrow$

$\implies$ Temos **máximo** de y para $x = \frac{3\pi}{2}$

Segunda Regra:

Teorema 4.4.3. *Se para o ponto onde se anula a derivada primeira, a derivada segunda é positiva $\implies$ y passa por um* ***mínimo****. Se a derivada segunda é negativa $\implies$ y passa por um* ***máximo****.*

$y'' < 0$, *y passa por um máximo.*

$y'' > 0$, *y passa por um mínimo.*

Exemplos:

1) $y = x^2 - 5x + 6$

$y' = 2x - 5$

$y'' = 2 \qquad$ sempre $(+) \implies$ Mínimo

2) $y = \operatorname{sen} x$

$$y' = \cos x = 0 \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$y'' = -\operatorname{sen} x$

Para $x = \frac{\pi}{2}$, $y'' = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1$ Máximo

Para $x = \frac{3\pi}{2}$, $y'' = -\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = +1$ Mínimo

Pontos de Inflexão

São pontos onde a concavidade da curva muda de sentido (a tangente à curva atravessa a curva).

Teorema 4.4.4. *Quando a derivada segunda* ***se anula*** *em um valor de x e y'* ***não muda de sinal****, tem-se um ponto de inflexão e vice-versa.*

OBS: Se além disso $y' = 0 \implies$ a tangente é horizontal, e se $y' = \infty \implies$ a tangente é vertical.

Exemplo:

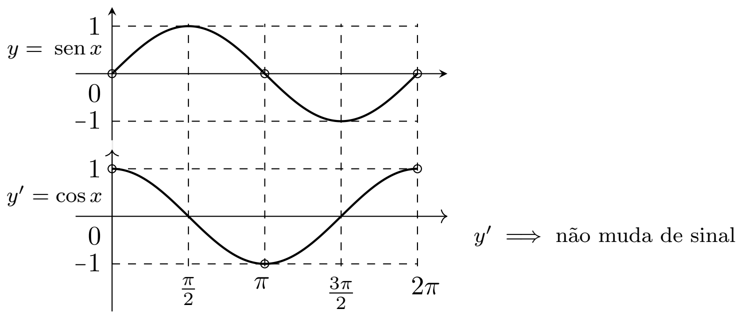
1. $y = x^3 \implies y' = 3x^2 \implies y'' = 6x$

   y'' anula-se para $x = 0$ e como y' é *sempre positiva* $\implies$ temos um ponto de inflexão para $x = 0$.

2. $y = \operatorname{sen} x \implies y' = \cos x \implies y'' = -\operatorname{sen} x$

   $$y'' = 0 \text{ para } \begin{cases} x = 0,\ 2\pi,\ \ldots \\ x = \pi,\ 3\pi,\ \ldots \end{cases}$$

   Para estes pontos a derivada primeira y' não muda de sinal $\implies$ pontos de inflexão.

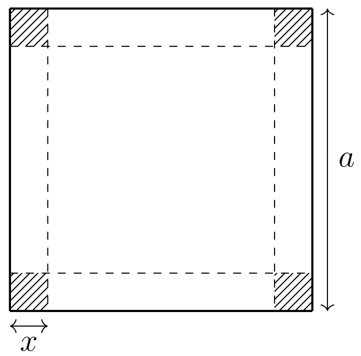


Aplicações práticas da determinação de máximos e mínimos

1) Toma-se uma folha quadrada de papelão, de lado igual a a, para construir uma caixa de base quadrada e sem tampa. De cada um dos quatro cantos, corta-se um quadrado de lado x e dobra-se as faixas restantes.

   Calcular o valor de x para que o volume seja máximo.

   Solução:

   Superfície do fundo vale
   $S = (a - 2x)^2$

   Volume da caixa $V = S \cdot x$

   $V = x(a-2x)^2 = x(a^2-4ax+4x^2)$
   $= 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$

   Anulando a derivada primeira:
   $V' = 12x^2 - 8ax + a^2 = 0$

   $$x = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48a^2}}{24} = \frac{8a \pm 4a}{24}$$
   $\Longrightarrow\ x_1 = \dfrac{a}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{a}{6}$

   Derivada 2ª: $V'' = 24x - 8a$

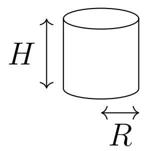
   Para $x = \dfrac{a}{2} \Longrightarrow V'' = 12a - 8a = 4a \Longrightarrow V$ é *mínimo*

   Para $x = \dfrac{a}{6} \Longrightarrow V'' = 4a - 8a = -4a \Longrightarrow \boxed{V \text{ é } \textit{máximo}}$

   Notar que para $x = \dfrac{a}{2}$ **não há caixa!** $\Longrightarrow \boxed{V = 0}$

2) Deseja-se fabricar uma panela de alumínio cilíndrica por meio de uma folha metálica de superfície S. Calcular a relação que deve existir entre a altura H e o raio R para que o volume seja máximo.

   Solução:

   Volume $\boxed{V = \pi R^2 H}$ (1)

   Como H e R são duas variáveis, devemos expressar o volume em função de uma só variável.

   Superfície total: $\boxed{S = \pi R^2 + 2\pi RH}$ (2)

onde $H = \dfrac{S - \pi R^2}{2\pi R}$ (3)

(3) em (1) fica:

$V = \pi R^2 \left(\dfrac{S - \pi R^2}{2\pi R}\right) = \dfrac{R}{2}(S - \pi R^2)$

$V = \dfrac{RS}{2} - \dfrac{\pi R^3}{2} = \boxed{f(R)}$

Anulando a derivada:

$V'_R = \dfrac{S}{2} - \dfrac{3\pi R^2}{2} = 0 \implies \begin{cases} S = 3\pi R^2 \\ R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \end{cases}$

Substituindo S em (2) fica:

$3\pi R^2 = \pi R^2 + 2\pi RH$

$2\pi R^2 = 2\pi RH \implies \boxed{R = H}$

Máximo ou mínimo?? Vamos à V''

$V''_R = -3\pi R < 0 \implies$ **MÁXIMO** de volume

3) Deseja-se fabricar uma lata de conserva cilíndrica com tampa que, para um volume V dado, tenha o mínimo de metal. Determinar a relação entre o raio e a altura.

OBS: É o problema da panela, com tampa e tendo volume dado.

Solução:

Volume: $V = \pi R^2 H$ (1)

Superfície total: $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$ (2)

De (1) tiramos: $H = \dfrac{V}{\pi R^2}$

Em (2) fica: $S = 2\pi R^2 + 2\pi R\dfrac{V}{\pi R^2} = 2\pi R^2 + \dfrac{2V}{R} = \boxed{f(R)}$

$S' = 4\pi R - \dfrac{2V}{R^2} = 0$

onde:

$4\pi R = \dfrac{2V}{R^2}$ e $\boxed{R = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}}$

$\downarrow$

$\boxed{V = 2\pi R^3}$

Igualando com (1) fica:

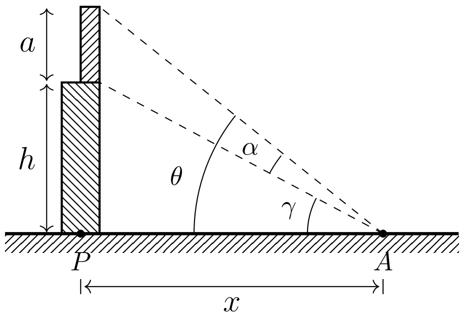
$2\pi R^3 = \pi R^2 H \implies \boxed{H = 2R}$

Máximo ou mínimo?

$S'' = 4\pi - 2V(-2R^{-3}) = 4\pi + \dfrac{4V}{R^3}$

sempre positivo $\implies$ **MÍNIMO** de superfície.

4) Seja um pedestal de altura h sobre o qual está colocada uma estátua de altura a. A que distância do pé do pedestal deve alguém colocar-se para ver a estátua sob o ângulo máximo?



Haverá uma distância AP $= x$ para a qual o ângulo α é máximo, o mesmo ocorrendo para $\operatorname{tg}\alpha$.

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\theta - \gamma) = \dfrac{\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\theta \cdot \operatorname{tg}\gamma}$ (1)

Mas $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a+h}{x}$ e $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{h}{x}$

Substituindo em (1) fica:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{a+h}{x} - \frac{h}{x}}{1 + \frac{a+h}{x} \cdot \frac{h}{x}} = \frac{x(a+h) - xh}{x^2 + h(a+h)}$$

$\downarrow$

$y = \dfrac{ax}{x^2 + ah + h^2}$

$y' = \dfrac{a(x^2 + ah + h^2) - ax(2x)}{(x^2 + ah + h^2)^2} = 0$

$\implies x^2 + ah + h^2 - 2x^2 = 0$

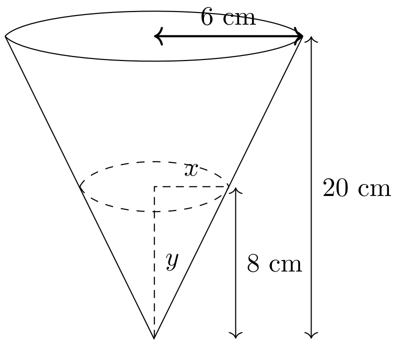
$\boxed{x = \sqrt{h(a+h)}}$ x é a média geométrica entre a altura do pedestal e a altura total.

Máximo ou mínimo? Estudemos o sinal da derivada no entorno do valor crítico.

Para $x < \sqrt{h(a+h)}$, por exemplo $x = 0 \implies y'$ é $(+) \implies y \nearrow \implies$

MÁXIMO de $\operatorname{tg}\alpha$ e portanto **MÁXIMO** de α.
Para $x > \sqrt{h(a+h)} \implies y'$ é $(-)$.

5) Um paciente recebe soro glicosado de um recipiente cônico, a uma taxa constante de 0,5 ml/min. Com que rapidez o nível de soro está baixando quando sua profundidade for igual a 8 cm?
Verifique que o nível baixa cada vez mais rapidamente à medida que a profundidade diminui.



V = volume do soro (em ml) no instante t
x = raio da sup. do soro (cm) em t
y = altura da sup. do soro (cm) em t

$V = V(t)$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0{,}5\text{ml/min}$$

$$V = \frac{\pi}{3}x^2 y \text{ com } \frac{x}{y} = \frac{6}{20} \implies \boxed{x = \frac{3y}{10}}$$

$$V = \frac{3\pi}{100}y^3$$

Derivando em relação a t temos:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{9\pi}{100}y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

Sendo $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0{,}5$ ml/min $= -0{,}5$ cm^3/min e $y = 8$ cm

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{25}{288\pi} \approx \boxed{-0{,}276\text{cm/min}}$$

De modo geral tem-se:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{50}{9\pi y^2} < 0$$

$$\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right] \to \infty \text{ quando } y \to 0$$

Se, por outro lado, eu desejasse saber a taxa de crescimento do raio da superfície do soro:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x}{y} = \frac{6}{20} \implies y = \frac{10}{3}x \\
&V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{10}{3} \cdot x^3 = \frac{10\pi}{9}x^3 \\
&\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{10\pi}{3} \cdot 3x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&-0{,}5 = \frac{10\pi}{3} \cdot x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{0{,}05}{x^2}\ \mathrm{cm/min}}
\end{aligned}
$$

6) A concentração de um fármaco no sangue, após sua administração por via IM, em uma única dose, é dada por:

$$y = c(t) = \frac{10t}{t^2 + 2t + 1}\,, t \geq 0$$

onde t é o tempo em horas. Determine os intervalos onde a concentração da substância no sangue está aumentando e onde está diminuindo.

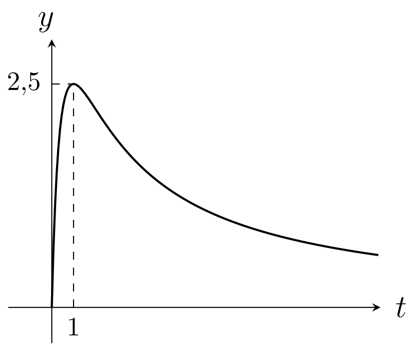
<u>Solução:</u>

$$
\begin{aligned}
y = c(t) &= \frac{10t}{t^2 + 2t + 1}\,, t \geq 0 \\
y' = c'(t) &= \frac{10(t+1)^2 - (10t) \cdot 2(t+1)}{(t+1)^4} \\
&= \frac{10(t+1)[t+1-2t]}{(t+1)^4} \\
&= \frac{10(1-t)}{(t+1)^3}\,, t \geq 0
\end{aligned}
$$

$y' > 0$ quando $t < 1$ (sempre $t \geq 0$)

$y' < 0$ quando $t > 1$

y tem *máximo* para $t = 1$



4.4.2 Estudo da Variação das Funções. Traçado das Curvas

Seja

$$\boxed{y = f(x)}$$

Poderemos ver:

- se a função é (+) ou (−);
- se a função cresce ou decresce e com que rapidez;
- se a função é nula ou infinita;
- se a função tem máximo ou mínimo.

Procedimento:

1º) Faz-se $x = 0$, calculando-se y.

2º) Faz-se $x = \pm\infty$, calculando-se y.

Se a fração obtida para y for $\frac{\infty}{\infty} \Longrightarrow$ dividir pela maior potência de x tanto o numerador quanto o denominador.

3º) Faz-se $y = 0$, deduzindo-se x.

4º) Faz-se $y = \infty$ e deduz-se x.

5º) Calcula-se y' e simplifica-se.

6º) Anula-se y'.

7º) Estudar sinal de y' para concluir sobre máximo ou mínimo.

8º) Se necessário calcula-se y'' (máximo ou mínimo: $y''(+) \implies$ mínimo e vice-versa).

Fazendo $y'' = 0$ encontrar os *pontos de inflexão*.

9º) Desenhar quadro para variações.

10º) Traçar curva.

Exemplos:

1) Trinômio do 2º grau.

$y = x^2 - 5x + 6$

para $\quad x = 0 \longrightarrow y = +6$

$\qquad x = \pm\infty \longrightarrow y = +\infty$

$y = 0$ para $x^2 - 5x + 6 = 0$ donde $x = +2$ ou $x = +3$.

$y' = 2x - 5$ anula-se para $x = \dfrac{5}{2}$

$y'' = +2 \implies$ *mínimo* de y.

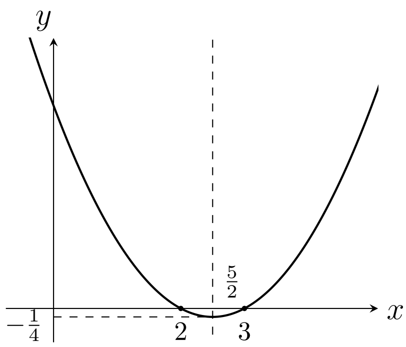
Para $x < \frac{5}{2}$, $y' < 0 \implies y \searrow$

Para $x > \frac{5}{2}$, $y' > 0 \implies y \nearrow$

O valor do mínimo é:

$y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = -\frac{1}{4}$

x	$-\infty$		0		2		$\frac{5}{2}$		3		$+\infty$
y'	$+\infty$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	6	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



2) Seja $y = \dfrac{1}{x}$

Para $x = 0 \qquad y = \infty$

Para $x = \pm\infty \quad y \to 0$

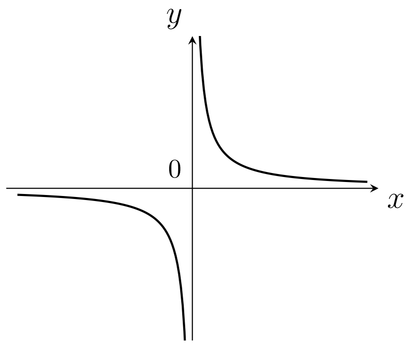
$$y' = -\frac{1}{x^2} = 0$$

Se $x = \pm\infty \implies y' \to 0$

Se $x = 0 \implies y' = \infty \implies y$ tende à vertical

y' é sempre $< 0 \implies y$ decresce sempre

x	$-\infty$			0			$+\infty$
y'	0	$-$		∞		$-$	0
y	0	$\searrow$	$-\infty$	|	$+\infty$	$\searrow$	0



3) $y = \dfrac{2x-1}{4x+2}$

Para $x = 0 \qquad y = -\frac{1}{2}$

Para $x = \pm\infty \quad \begin{cases} y = \frac{\infty}{\infty} = ? \implies \text{Fazer} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad y = \dfrac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{4x}{x} + \frac{2}{x}} = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{4 + \frac{2}{x}} \quad \lim\limits_{x\to\infty} y = \dfrac{1}{2}$

$y = 0$ para $2x - 1 = 0 \implies \boxed{x = \dfrac{1}{2}}$

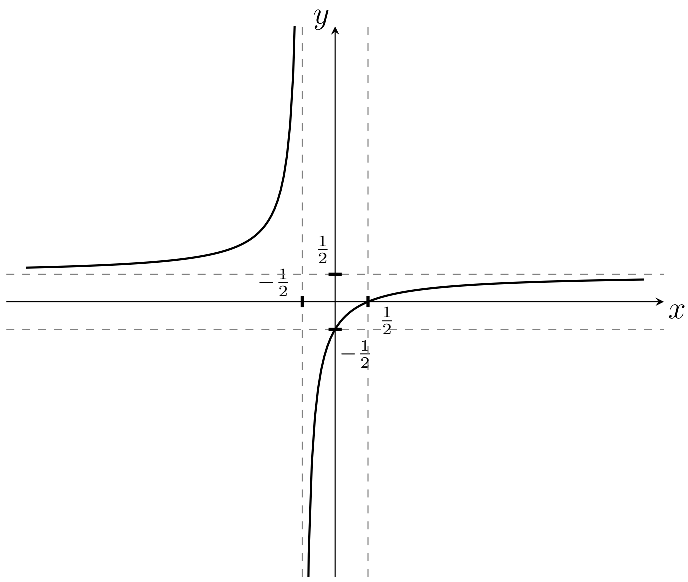
$y = \infty$ para $4x + 2 = 0 \implies \boxed{x = -\dfrac{1}{2}}$

$$y' = \frac{2\cdot(4x+2) - (2x-1)\cdot 4}{(4x+2)^2} = \frac{\cancel{8x} + 4 - \cancel{8x} + 4}{(4x+2)^2} = \frac{8}{(4x+2)^2}$$

$y' = \dfrac{8}{(4x+2)^2} = 0$ IMPOSSÍVEL $\implies$ Não há máximo nem mínimo

y' é sempre positivo $\Longrightarrow$ *y cresce sempre*

x	$-\infty$			$-\frac{1}{2}$			0		$+\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$
y	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$	$\vert$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\frac{1}{2}$



4) $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$

Para $x = 0 \Longrightarrow y = 0$

Para $x = \pm\infty \Longrightarrow y = \frac{\infty}{\infty}$ indeterminação

Fazer $y = \dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}} = \dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1}$

$\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$

$y = 0$ para $2x = 0$ donde $x = 0$

$y = \infty$ para $1 + x^2 = 0$ donde $x^2 = -1$ (impossível)

$y' = \dfrac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2 + 2x^2 - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = 0$ donde $\boxed{x = \pm 1}$

A derivada tem o sinal de: $-2x^2 + 2$,

trinômio que passa por máximo ou mínimo $\Longrightarrow$ $(+)$ para $-1 < x < 1$; $(-)$ para $x < -1$ ou $x > 1$

Há um mínimo para $x = -1$ e máximo para $x = 1$

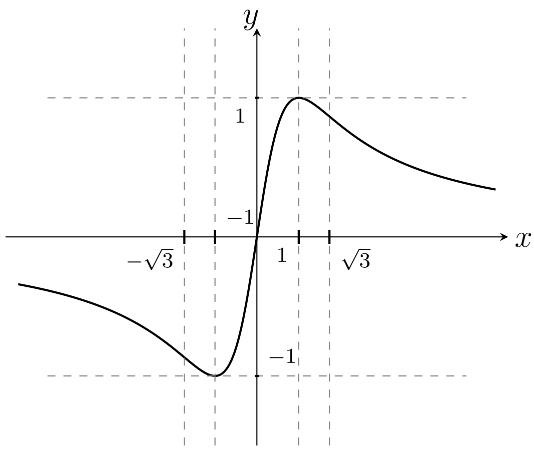
x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	2	$+$	0	$-$	$-$
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$	$\searrow$	0

Pontos de inflexão (anular y''):

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(-4x)\cdot(1+x^2)^2 - (2-2x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{(1+x^2)\cdot(-4x) - 4x\cdot(2-2x^2)}{(1+x^2)^3 = 0} \end{aligned}$$

donde: $-4x - 4x^3 - 8x + 8x^3 = 0 \implies 4x^3 - 12x = 0$

$$4x(x^2-3) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = +\sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$



5) $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

Para $x = 0 \implies y = 0$

Para $x = \pm\infty \implies y = +\infty$

$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0$

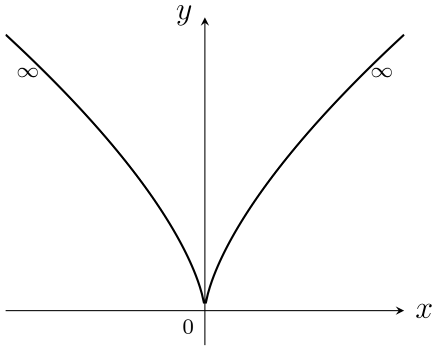
Para $x = 0 \implies y' = \infty$; a curva tende à vertical

Para $x = \pm\infty \implies y' = 0$; a curva tende à horizontal

Para $x < 0$; $y' < 0 \implies y \searrow$

Para $x > 0$; $y' > 0 \implies y \nearrow$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	0	$-$	∞	$+$	0
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



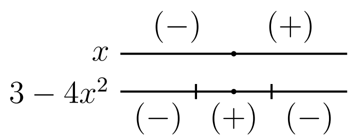
6) Seja a função $y = -2x^4 + 3x^2 - 5$

Para $x = 0 \implies y = -5$

Para $x = \pm\infty \implies y = -\infty$

$y' = -8x^3 + 6x = 2x(3 - 4x^2) = 0$

$$y' = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ 3 - 4x^2 = 0 \implies x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \text{(trinômio passa por um máximo)} \end{cases}$$

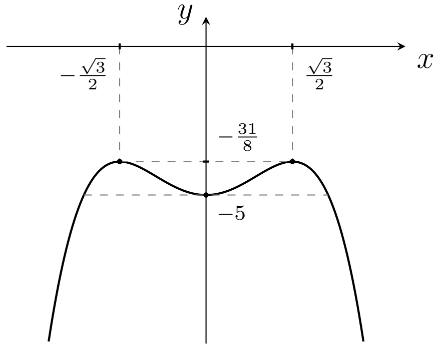


$y' < 0$ para $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < 0$ e $x > +\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$y' > 0 \text{ para } \begin{cases} x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 < x < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Para $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \implies y = -\frac{31}{8}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{31}{8}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$-\frac{31}{8}$	$\searrow$	$-\infty$



7) $y = \dfrac{1}{3}(x+1)^3(3x-2)^2$

Para $x = 0 \implies y = \frac{4}{3}$

$x = -\infty \implies y = -\infty$

$x = +\infty \implies y = +\infty$

$$y = 0 \text{ para } \begin{cases} x+1=0 \implies x=-1 \\ 3x-2=0 \implies x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

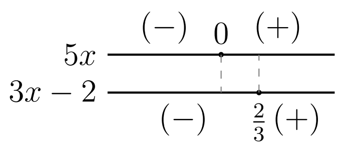
$$y' = \frac{1}{\cancel{3}}\left[\cancel{3}(x+1)^2\cdot(3x-2)^2 + (x+1)^3\cdot 2(3x-2)\cdot\cancel{3}\right]$$

$$y' = (3x-2)(x+1)^2\left[(3x-2)+2(x+1)\right]$$

$$y' = 5x(3x-2)(x+1)^2$$

$$y' = 0 \text{ para } \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \\ x = -1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Para } x = \pm\infty \\ y = \infty \implies y \text{ vertical} \end{array}\right)$$

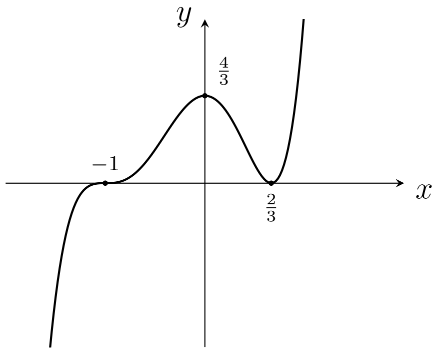
Sinal de y' depende do produto: $5x(3x-2)$



$y' < 0$ para $0 < x < \frac{2}{3}$

$y' > 0$ para $x < 0$ e $x > \frac{2}{3}$

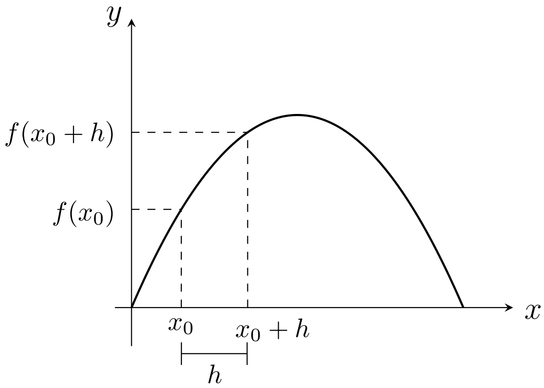
x	$-\infty$		-1		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'	∞	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	∞
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



4.4.3 Fórmula de Taylor e Maclaurin

Dada uma função $f(x)$, podemos escrever o valor da função em um ponto $x_0 + h$ se conhecermos o valor $f(x_0)$, por meio de potências crescentes de h, na forma de um polinômio:

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} \\ &+ f'''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_n \end{aligned}$$



Demonstração. Suponhamos que $f(x)$ seja diferenciável no intervalo $[x_0, x_0 + h]$ e possui derivadas sucessivas únicas, finitas ou nula em número ilimitado no intervalo. Admitamos a possibilidade de escrever:

$$\begin{aligned} f(x) &= A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \ldots \\ &= A_n(x-x_0)^n + A_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \ldots \end{aligned}$$

Vamos derivar sucessivamente:

$f'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + 3A_3(x - x_0)^2 + 4A_4(x - x_0)^3 + \ldots$

$f''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3 \cdot A_3(x - x_0) + 3 \cdot 4 \cdot A_4(x - x_0)^2 + \ldots$

$f'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot A_4(x - x_0) + \ldots$

$f^{(4)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot A_4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot A_5(x - x_0) + \ldots$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot A_n + 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot A_{n+1}(x-x_0)+\ldots$

$\Downarrow$ Fazendo $x = x_0$

$f(x_0) = A_0,\ f'(x_0) = A_1,\ f''(x_0) = 2 \cdot A_2$

$f'''(x_0) = 2 \cdot 3 \cdot A_3 \quad \ldots \quad f^{(n)}(x_0) = n! \cdot A_n$

OBS: Quando x_0 designamos fórmula de Maclaurin.

Exemplos de aplicações:

Seja desenvolver em série de potências a função:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ em torno de $x = 0$

$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = \cos 0 = 1$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x$	$f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -\cos 0 = -1$
$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$	$f^{(4)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1$

$\vdots$

$$f(x) = \operatorname{sen} x = 0 + x \cdot 1 + \frac{x^2}{2!} \cdot 0 + \frac{x^3}{3!} \cdot (-1) + \frac{x^4}{4!} \cdot 0 + \frac{x^5}{5!} \cdot 1 + \ldots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

b) $f(x) = \cos x$ em torno de 0

$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = \operatorname{sen} x$	$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(0) = 1$

$$\vdots$$

$$f(x) = \cos x = 1 + x \cdot 0 + \frac{x^2}{2!} \cdot (-1) + \frac{x^3}{3!} \cdot 0 + \frac{x^4}{4!} \cdot 1 + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

c) $f(x) = e^x$ na vizinhança de $x = 0$

$$\begin{array}{ll}
f(x) = e^x & f(0) = 1 \\
f'(x) = e^x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = e^x & f''(0) = 1 \\
\vdots & \vdots \\
f^{(n)}(x) = e^x & f^{(n)}(0) = 1
\end{array}$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

d) Dedução das *fórmulas de Euler*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta\,;\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta \qquad \text{com } i = \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \ldots \\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \ldots
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ e^{i\theta} = \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots}_{\cos\theta} + i\left(\underbrace{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots}_{\operatorname{sen}\theta}\right)$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Substituindo θ por $-\theta$ vem:

$$
\begin{aligned}
e^{-i\theta} &= 1 - \frac{(-\theta)^2}{2!} + \frac{(-\theta)^4}{4!} - \frac{(-\theta)^6}{6!} + \ldots + i\left(-\theta - \frac{(-\theta)^3}{3!} + \frac{(-\theta)^5}{5!} - \ldots\right) \\
&= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots + i\left(-\theta + \frac{\theta^3}{3!} - \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} - \frac{\theta^9}{9!} + \ldots\right) \\
&= \underbrace{1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots}_{\cos x} - i\left(\underbrace{\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \ldots}_{\operatorname{sen} x}\right)
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Fórmula do erro do desenvolvimento em Série de Taylor:

Taylor $\quad R_n = \dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(a + \delta h)$

Maclaurin $\quad R_n = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\delta x)$

Exemplos:

1) Achar o valor de $\operatorname{sen} 31^{\text{o}}$ com erro menor que 0,00001 conhecidos os valores de $\operatorname{sen} 30^{\text{o}}$ e $\cos 30^{\text{o}}$.

2) (Interpolação linear $\Leftrightarrow$ dois primeiros termos da Série de Taylor)

   As temperaturas de um paciente, em um dado dia, foram anotadas de 3 em 3 horas, obtendo-se os dados da tabela. Estabeleça uma estimativa para a temperatura às 20 horas.

3) O crescimento de uma cultura de bactérias é representado pela equação $Q(t) = 500 + \sqrt{t+1} + 4t^2$, onde t expressa o tempo médio em horas. Estimar o aumento na população Q no intervalo compreendido entre 8h e 8h15min.
   Qual o erro máximo cometido por essa estimativa? Pede-se para usar a diferencial da função no ponto $t = 8$.

4) Estimar a área da superfície corporal de uma criança pesando 4,3 kg, utilizando o polinômio de Taylor de ordem três. Avaliar o erro cometido e comparar a estimativa obtida pelo polinômio com o valor da função

$$\boxed{s = 0{,}11x^{\frac{2}{3}}}$$

$s =$ superfície e $x =$ peso.
OBS: Começar com $\boxed{x = 8}$.

<u>Exercício:</u> Acumulação de uma substância para fins terepêuticos, após repetidas doses.
Super difusão instantânea.
Concentração oscilará entre as doses.
Sendo k o coeficiente de eliminação da droga.
Intuito é manter a concentração entre os níveis de toxicidade e o mínimo aceitável.

$$C_c < c(t) < C_p$$

<u>Qual o intervalo</u> $\boxed{t_0}$ entre as administrações para que $C_c < c(t) < C_p$?

4.5 Exercícios

1) Determine as derivadas das funções abaixo, usando a definição

$$y' = f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

a) x^2

<u>Solução:</u>

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} = 2x \end{aligned}$$

b) $y = x^2 - x + 1$

<u>Solução:</u>

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) + 1 - (x^2 - x + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x} - h + \cancel{1} - \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{1}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h - 1)}{\cancel{h}} = 2x - 1 \end{aligned}$$

c) $y = ax^2 + bx + c$

Solução:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2+bx+c)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{ax^2} + 2axh + ah^2 + \cancel{bx} + bh + \cancel{c} - \cancel{ax^2} - \cancel{bx} - \cancel{c}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2ax + ah + b)}{\cancel{h}} = 2ax + b$$

d) $y = x^3$

Solução:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - \cancel{x^3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3hx + h^2)}{\cancel{h}} = 3x^2$$

e) $y = x^3 - 2x + 1$

Solução:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - 2(x+h) + 1 - (x^3 - 2x + 1)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{2x} - 2h + \cancel{1} - \cancel{x^3} + \cancel{2x} - \cancel{1}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(3x^2 + 3xh + h^2 - 2)}{\cancel{h}} = 3x^2 - 2$$

f) $y = \dfrac{1}{x}$

Solução:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{x} - \cancel{x} - h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}x(x+h)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x^2 + xh} = -\frac{1}{x^2}$$

g) $y = \sqrt{x}$

Solução:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h} + \sqrt{h})} = \frac{1}{2\sqrt{h}}$$

h) $g(t) = \dfrac{1}{1+t}$

Solução:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+t+h} - \frac{1}{1+t}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{1}+\cancel{t}-\cancel{1}-\cancel{t}-h}{(1+t)(1+t+h)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(1+t)(1+t+h)} = -\frac{1}{(1+t)^2}$$

i) $g(t) = \dfrac{1}{1-t}$

Solução:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1-t-h} - \frac{1}{1-t}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\cancel{1}-\cancel{t}-\cancel{1}+\cancel{t}+h}{(1-t)(1-t-h)}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(1-t)(1-t-h)} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

j) $y = \dfrac{1}{x^2}$

Solução:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2hx - h^2}{hx^2(x^2+2hx+h^2)}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}x^2(x^2+2hx+h^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{x^2(x^2+2hx+h^2)}$$
$$= \frac{-2x}{x^2(x^2)} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

k) $y = c$, $c =$ constante

Solução:

$$y'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$\Longrightarrow y' = \frac{c-c}{h} = 0$$

l) $y = \sqrt{x+1}$

Solução:

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x}+h+\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{1}}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}
$$

m) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Solução:

$$
\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+h}}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{h\big[x\sqrt{x+h}+(x+h)\sqrt{x}\big]} = \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}\big[x\sqrt{x+h}+(x+h)\sqrt{x}\big]}\\
&= \frac{-1}{x\sqrt{x}+x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

2) Usando a regra da cadeia, encontre as derivadas das funções abaixo:

a) $y = e^{(x^2+1)}$

Solução:

$y = f\big(u(x)\big)$, onde $f(u) = e^u$;

$u(x) = x^2+1$

$\Longrightarrow\ y' = f'(u)\cdot u'(x)$

$\Longrightarrow\ y' = e^{(x^2+1)}\cdot 2x = 2xe^{(x^2+1)}$

b) $y = e^{\operatorname{sen} x}$

Solução:

$y = e^u$; $u = \operatorname{sen} x$

$y' = e^u \cdot u'_x \ \Longrightarrow\ y' = e^{\operatorname{sen} x}\cdot \cos x$

c) $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

Solução:

$$y = \ln(u) \ ; \ u = v^2$$
$$v = \operatorname{sen} x$$
$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$
$$y' = \frac{1}{u} \cdot 2v \cdot \cos x$$
$$y' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{2 \cancel{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x}{\operatorname{sen}^{\cancel{2}} x}$$
$$y' = \frac{2 \cos x}{\operatorname{sen} x} = 2 \operatorname{cotg} x$$

d) $y = e^{(\cos x + 1)}$

Solução:

$$y = e^u \ ; \ u = \cos x + 1$$
$$y' = e^u \cdot u' = e^{\cos x + 1} \cdot (-\operatorname{sen} x)$$
$$y' = -e^{(\cos x + 1)} \cdot \operatorname{sen} x$$

e) $y = \dfrac{1}{u^2}; \ u = 1 + x^3$

Solução:

$$y' = -\frac{2}{u^3} \cdot 2u \cdot 3x^2$$
$$y' = -\frac{2}{(1 + x^3)^3} \cdot 2(1 + x^3) \cdot 3x^2$$
$$y' = -\frac{12x^2 \cancel{(1 + x^3)}}{(1 + x^3)^{\cancel{3}2}} = -\frac{12x^2}{(1 + x^3)^2}$$

f) $y = \dfrac{u + 1}{u - 1}; \ u = e^{2x}$

Solução:

$$
\begin{aligned}
& v = u + 1 \ ; \ t = u - 1 \\
& y = \frac{v}{t} \implies y' = \frac{v' \cdot t - v \cdot t'}{t^2} \\
& y' = \frac{2e^{2x}(e^{2x} - 1) - (e^{2x} + 1)2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} \\
& y' = \frac{2e^{2x}\big[(e^{2x} - 1) - (e^{2x} + 1)\big]}{(e^{2x} - 1)^2} \\
& y' = \frac{2e^{2x}(\cancel{e^{2x}} - \cancel{e^{2x}} - 1 - 1)}{(e^{2x} - 1)^2} \\
& y' = -\frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}
\end{aligned}
$$

g) $y = \operatorname{sen}\big(\cos(1 + x^3)\big)$

Solução:

$$
\begin{aligned}
& y = u\Big(v\big(t(x)\big)\Big) \\
& u = \operatorname{sen} v \quad u'_v = \cos v \\
& v = \cos t \quad v'_t = -\operatorname{sen} t \\
& t = 1 + x^3 \quad t'_x = 3x^2 \\
& y' = u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x \\
& y' = \cos\big(\cos(1 + x^3)\big) \cdot \big(-\operatorname{sen}(1 + x^3)\big) \cdot 3x^2 \\
& \quad\;\, = -3x^2 \cdot \cos\big(\cos(1 + x^3)\big) \cdot \operatorname{sen}(1 + x^3)
\end{aligned}
$$

h) $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

Solução:

$$y = u\Big(v\big(t(x)\big)\Big)$$
$$u = \sqrt{v} \ ; \ u'_v = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$v = 1 + \sqrt{t} \ ; \ v'_t = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$
$$t = 1 + x^2 \ ; \ t'_x = 2x$$
$$y' = u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x \implies y' = \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 2x$$
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x$$
$$y' = \frac{x}{2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} \cdot \sqrt{1+x^2}}$$

3) Considerando $y = f(x)$, use a diferenciação implícita para calcular $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, onde:

a) $xy = 1$

Solução:

$$1 \cdot y + x \cdot y' = 0$$
$$y' = -\frac{y}{x}$$

b) $x^2y + xy^2 = 10$

Solução:

$$2x \cdot y + x^2 \cdot y' + 1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y' = 0$$
$$x^2y' + 2xyy' = -2xy - y^2$$
$$y'(x^2 + 2xy) = -2xy - y^2$$
$$y' = -\frac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy}$$

c) $x^3 + xy - y^3 = 1$

Solução:

$$3x^2 + 1 \cdot y + x \cdot y' - 3y^2 \cdot y' = 0$$
$$xy' - 3y^2y' = -3x^2 - y$$
$$y'(x - 3y^2) = -(3x^2 + y)$$
$$y' = -\frac{3x^2 + y}{x - 3y^2}$$

d) $2xy - y^2 = y + x$

Solução:

$$2y + 2x \cdot y' - 2y \cdot y' = y' + 1$$
$$2xy' - 2yy' - y' = 1 - 2y$$
$$y'(2x - 2y - 1) = 1 - 2y$$
$$y' = \frac{1 - 2y}{2x - 2y - 1}$$

e) $y = (x + 1)^3(x - 1)^2$

Solução:

$$y' = 3(x + 1)^2(x - 1)^2 + (x + 1)^3 2(x - 1)$$
$$y' = 3(x + 1)^2(x - 1)^2 + 2(x + 1)^3(x - 1)$$
$$y' = (x + 1)^2(x - 1)\big[3(x - 1) + 2(x + 1)\big]$$
$$y' = (x + 1)^2(x - 1)(5x - 1)$$

f) $y = x^2y^2$

Solução:

$$y' = 2x \cdot y^2 + x^2 \cdot 2yy'$$
$$y' = 2xy^2 + 2x^2yy'$$
$$y' - 2x^2yy' = 2xy^2$$
$$y'(1 - 2x^2y) = 2xy^2$$
$$y' = -\frac{2xy^2}{2x^2y - 1}$$

g) $e^y \cdot x^2 = 1$

Solução:

$$e^y \cdot y' \cdot x^2 + e^y \cdot 2x = 0$$
$$y' = -\frac{2\cancel{x}\,\cancel{e^y}}{x^{\cancel{2}}\,\cancel{e^y}} = -\frac{2}{x}$$

h) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Solução:

$$y' = \frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} \cdot \cancel{2}x \cdot x - \sqrt{x^2+1} \cdot 1}{x^2}$$

$$y' = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$y' = -\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

i) $x^3 + xy = y$

Solução:

$$3x^2 + y + xy' = y'$$

$$y'(1-x) = 3x^2 + y$$

$$y' = \frac{3x^2+y}{1-x}$$

j) $\dfrac{x^2 - xy}{xy} = 1$

Solução:

$$\frac{(2x - y - xy')xy - (x^2 - xy)(y + xy')}{x^2y^2} = 0$$

$$2x^2y - xy^2 - x^2yy' - x^2y - x^3y' + xy^2 + x^2yy' = 0$$

$$x^3y' = x^2y$$

$$y' = \frac{y}{x}$$

k) $\sqrt{x^2+y^2} = y$

Solução:

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x + 2yy') = y'$$

$$\cancel{2}(x + 2yy') = \cancel{2}y\sqrt{x^2+y^2}$$

$$2yy' = y\sqrt{x^2+y^2} - x$$

$$y' = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - x}{2y}$$

l) $(xy-2)(x+y)=125$

Solução:

$$
\begin{aligned}
&(y+xy')(x+y)+(xy-2)(1+y')=0\\
&xy+x^2y'+y^2+xyy'+xy+xyy'-2-2y'=0\\
&x^2y'+2xyy'-2y'=2-y^2-2xy\\
&y'(x^2+2xy-2)=2-y^2-2xy\\
&y'=\frac{2-y^2-2xy}{x^2+2xy-2}
\end{aligned}
$$

m) $e^xy^2=1$

Solução:

$$
\begin{aligned}
&e^xy^2+e^x\cdot 2y\cdot y'=0\\
&2ye^xy'=-e^xy^2\\
&y'=-\frac{\cancel{e^x}y^{\cancel{2}}}{2\cancel{y}\cancel{e^x}}\\
&y'=-\frac{y}{2}
\end{aligned}
$$

4.6 Princípio de Fermat

"Um raio de luz ao se propagar de um ponto a outro, tomará sempre o caminho que demande o menor tempo".

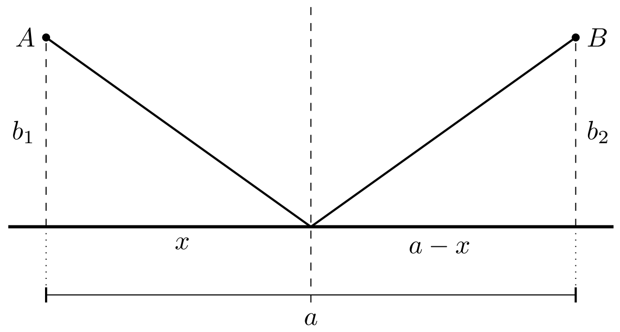
$$\boxed{L=\int u\,\mathrm{d}s}$$

u : índice de refração do meio

ds : variação infinitesimal do raio ao longo da trajetória

Num raio homogêneo e isotrópico, o caminho óptico vale $\boxed{L=n\cdot s}$ pois n é constante.

Reflexão:



$$r_1 = \sqrt{b_1^2 + x^2}$$

$$r_2 = \sqrt{b_1^2 + (a-x)^2}$$

$$L = n \cdot s = n(\overbrace{r_1 + r_2}^{s})$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = n\left(\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{b_1^2 + x^2}} \\ \dfrac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-2(a-x)}{2\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}} \end{cases}$$

Caminho mínimo: $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 0$

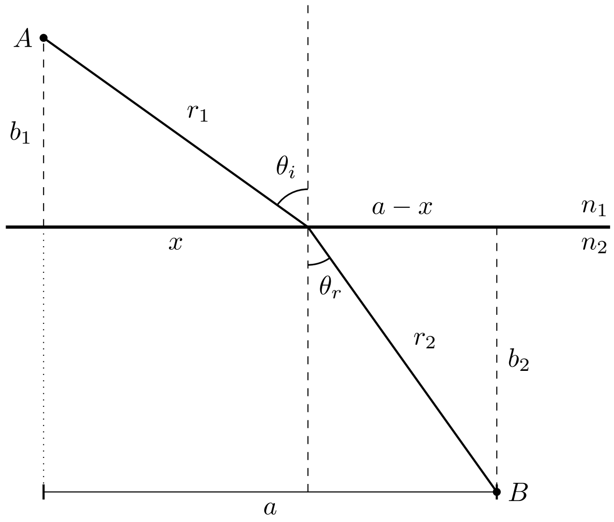
$$n\left(\frac{x}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} - \frac{a-x}{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}}\right) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} = \frac{a-x}{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}}$$

Mas: $\dfrac{x}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} = \operatorname{sen}\theta_i$; $\dfrac{a-x}{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}} = \operatorname{sen}\theta_r$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta_i = \operatorname{sen}\theta_r} \Longrightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r}$$

Refração:



$$L_1 = n_1 r_1$$
$$L_2 = n_2 r_2$$

Princípio de Fermat

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n_1 r_1 + n_2 r_2)$$

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{b_1^2 + x^2} \\ r_2 = \sqrt{b_1^2 + (a-x)^2} \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{b_1^2 + x^2}} \\ \dfrac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-2(a-x)}{2\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}} \end{cases}$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = n_1 \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}x} + n_2 \frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = n_1 \frac{x}{\sqrt{b_1^2 + x^2}} - n_2 \frac{a-x}{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}}$$

$$\implies n_1 \overbrace{\frac{x}{\sqrt{b_1^2 + x^2}}}^{\operatorname{sen}\theta_i} - n_2 \overbrace{\frac{a-x}{\sqrt{b_2^2 + (a-x)^2}}}^{\operatorname{sen}\theta_r} = 0$$

$$\implies n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_r$$

$\boxed{\dfrac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_r} = \dfrac{n_2}{n_1}}$ Lei de Snell

4.7 Movimento Browniano

Pelo princípio da equipartição da energia, partículas num dado sistema em equilíbrio, apresentam a mesma energia cinética média. Para uma certa direção, na ausência de forças externas, podemos escrever:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{1}{2}kT\,.$$

m: massa da partícula

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$: velocidade da partícula numa dada direção

k: constante de Boltzmann

T: temperatura absoluta

Daí, concluímos que partículas com menor massa, apresentam maior velocidade média.

O movimento Browniano é observado para partículas diminutas em meio líquido, cujas dimensões ainda permitam visualização, por microscopia óptica de campo escuro, por exemplo. Este efeito, como mostrado pela fórmula da energia cinética média acima, é cada vez mais nítido quanto menores (ou seja com menos massa) forem as partículas.

O movimento médio de uma partícula, a partir de uma origem num dado eixo, após o tempo t é dado pela equação de Einstein:

$$\bar{x} = \sqrt{2Dt}$$

D: coeficiente de difusão

t: tempo decorrido

O coeficiente de difusão de uma partícula em suspensão, é definida pela lei de difusão de Einstein, como:

$$Df = kT\,;\ \text{onde } f \text{ é denominado coeficiente friccional.}$$

Para partículas esféricas podemos escrever:

$$D = \frac{kT}{f} = \frac{kT}{6\pi\eta a} = \frac{RT}{6\pi\eta a N_A}$$

$$\Rightarrow\ \bar{x} = \sqrt{2 \times \frac{RT}{6\pi\eta a N_A} \times t}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\bar{x} = \sqrt{\frac{RTt}{3\pi\eta a N_A}}}$$

R: constante dos gases

π: 3,1416

η: coeficiente de viscosidade

a: raio da partícula

N_A: número de Avogrado

Exercícios:

1) Calcular o deslocamento médio devido ao movimento Browniano após 1 minuto, ao longo de um eixo, para uma partícula esférica de raio 0,1μm suspensa em água a 25°C. Dado: coeficiente de viscosidade da água nesta temperatura é $8{,}9 \times 10^{-4}$ kg·m^{-1}·s^{-1}.

   Solução:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{RTt}{3\pi\eta a N_A}}$$

$$= \sqrt{\frac{8{,}31451\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \times 298\text{K} \times 60\text{s}}{3 \times 3{,}1416 \times 89 \times 10^{-4}\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \times 0{,}1 \times 10^{-6}\text{m} \times 6{,}01 \times 10^{23}}}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \sqrt{\frac{148663{,}439 \times 10^{11}}{504{,}961 \times 10^{13}}}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \sqrt{294{,}405 \times 10^{-12}}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 17{,}2 \times 10^{-6}\text{m}$$

$$\boxed{\bar{x} = 17{,}2\mu\text{m}}$$

2) Seja um meio aquoso estacionário, no qual ocorre a difusão linear livre de um soluto cujo coeficiente de difusão é $2{,}32 \times 10^{-5}$ cm^2/s. Num ponto de abcissa 0,22 cm, a concentração do soluto e 0,035 mol·L^{-1} e num ponto de abcissa 0,23 cm, a concentração é 0,032 mol·L^{-1}. Qual a quantidade aproximada de soluto que atravessa por segundo uma superfície de área 1,5 cm^2, perpendicular à direção de difusão? Dados:

   1ª lei de Fick: $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -D \times A \times \dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$,

   sendo m: massa; D: coeficiente de difusão; A: área; c: concentração do soluto.

   Solução:

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} \approx \frac{0{,}032 - 0{,}035}{0{,}23 - 0{,}22} = -0{,}3 \text{ mol·L}^{-1}\text{·cm}^{-1} = -0{,}3 \times 10^{-3} \text{ mol/cm}^4$$

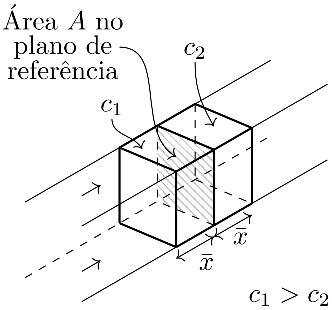
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -2{,}32 \times 10^{-5} \times 1{,}5 \times (-0{,}3 \times 10^{-3}) = 1{,}04 \times 10^{-8} \text{ mol·s}^{-1}$$

Deduções para: (1) equação do deslocamento browniano médio e (2) lei da difusão de Einstein. Para ambas as deduções, utilizaremos a 1ª lei de Fick da difusão, que afirma: a massa dm de substância que difunde na direção x, no tempo t, através da área A, é proporcional ao gradiente de concentração dc/dx relativo ao plano em questão.

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -D\,A\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{d}m = -D\,A\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t} \quad (*)_1$$

sinal $(-)$: difusão se processa da região de maior concentração para a de menor concentração.
m: massa
D: coeficiente de difusão
A: área relacionada com a difusão
c: concentração (massa/volume)

(1) **Equação do deslocamento Browniano**



Para $\bar{x}$ pequeno, podemos escrever, para a massa de partículas deslocadas da esquerda para a direita (corresponde a 1/3 do nº total de partículas deslocadas) através de A (área unitária neste caso).

$$(*)_2\ m = \frac{(c_1 - c_2)\bar{x}}{2}\,{}^{\times x}_{\times x} = \frac{(c_1 - c_2)\bar{x}^2}{2\bar{x}}\,,\ \text{onde}\ \frac{c_1 - c_2}{\bar{x}} \approx \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\ \boxed{\text{para } \bar{x} \text{ pequeno}}$$

$$\Rightarrow (*)_3 \quad m = -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\,\bar{x}^2$$

Da 1ª lei de Fick, $(*)_1$ considerando a área A, unitária, fica:

$$(*)_4 \quad m = -D\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t\,.$$

Combinando $(*)_3$ com $(*)_4$ fica: $-\frac{1}{2}\cancel{\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}}\,\bar{x}^2 = -D\cancel{\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}}\,\mathrm{d}t$

$$\Rightarrow \bar{x}^2 = 2D\,\mathrm{d}t \Rightarrow \bar{x} = \sqrt{2D\,\mathrm{d}t}$$

(2) **Lei de difusão de Einstein**

A primeira lei de Fick afirma:

$$\mathrm{d}m = -DA\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}t \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -DA\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}}\,(*)_1$$

m: massa
D: coeficiente de difusão
A: área
c: concentração
f: coeficiente funcional
T: temperatura absoluta
K: constante de Boltzmann

Adicionalmente, podemos concluir que o trabalho para inovar uma partícula numa distância "dx", contra uma resistência de fricção "f", corresponde à variação de potencial químico dμ, sendo:

$$\mathrm{d}\mu = K\,T\,\mathrm{d}(\ln c)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{f\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}_{\text{Força}} \times \mathrm{d}x}_{\text{Trabalho}} = K\,T\,\mathrm{d}(\ln c)$$

Esta equação diferencial pode ser reorganizada como:

$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{KT}{f}\,\dfrac{\mathrm{d}(\ln c)}{\mathrm{d}x}$; como c é função de x, a equação fica:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{KT}{f} \times \frac{1}{c}\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{KT}{f\,c}\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}} \quad (*)_2$$

Podemos escrever a massa difundida através de A, no tempo dt, como:

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = A\,c\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \quad (*)_3$$

$$-\mathrm{d}m = \underbrace{\overset{\substack{\text{Área}\\ \downarrow}}{A}\,\overset{\text{massa/volume}}{c}\,\mathrm{d}x}_{\text{massa}}$$

Usando $(*)_1$ e $(*)_3$, obtemos:

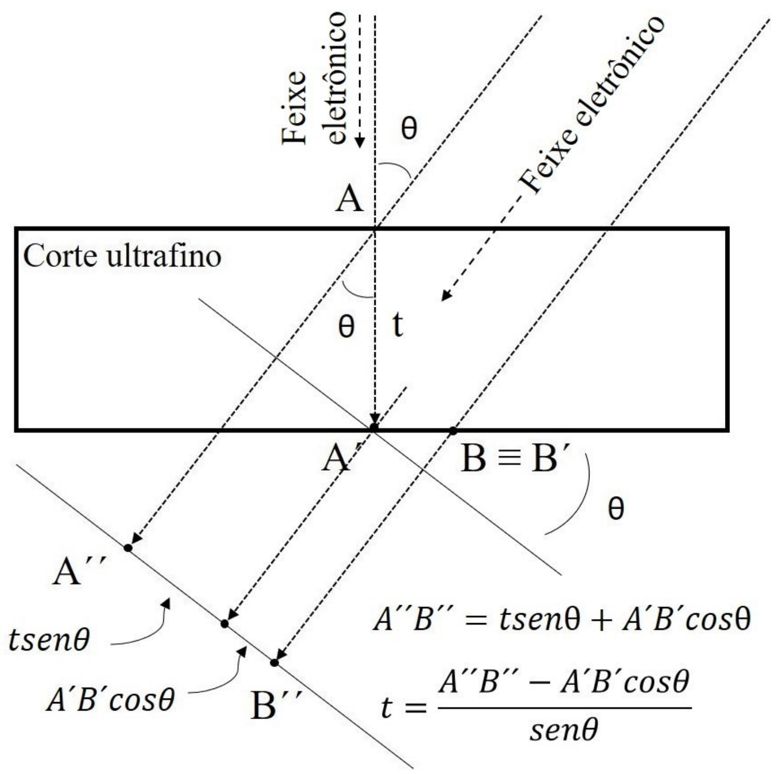
$$D\,\cancel{A}\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \cancel{A}\,c\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{c\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = D\,\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}} \quad (*)_4$$

Usando $(*)_2$ em $(*)_4$, obtemos finalmente:

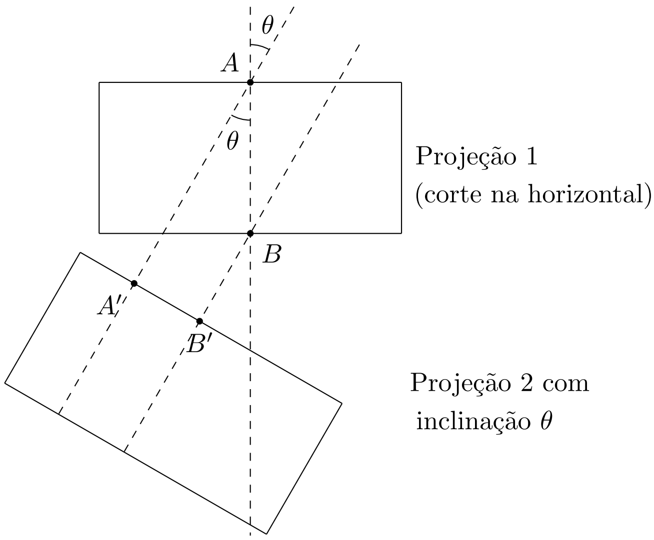
$$D\,\frac{\cancel{\mathrm{d}c}}{\cancel{\mathrm{d}x}} = \cancel{c}\,\frac{KT}{f\cancel{c}}\,\frac{\cancel{\mathrm{d}c}}{\cancel{\mathrm{d}x}} \Rightarrow \boxed{D\,f = K\,T}$$

4.8 Cortes ultrafinos

Muitas análises de cortes ultrafinos no interior do microscópio eletrônico de transmissão, dependem da medida precisa da espessura do corte analisado. A espessura t pode ser obtida a partir das projeções da distância de dois objetos pontuais em faces opostas do corte, em imagens obtidas de projeções do corte em duas direções. Na figura, A e B são dois pontos em faces opostas do corte. Duas direções de projeção são apresentadas (uma ortogonal e outra segundo o ângulo θ em relação à vertical; t a variável do problema, corresponde à espessura do corte. No problema real, o feixe eletrônico é mantido fixo, e o objeto gira em torno do eixo do goniômetro, onde se insere o porta-objeto.



Avaliação da precisão do cálculo de espessuras de cortes para observação por microscopia eletrônica de transmissão, usando projeções com ângulos de inclinação diferentes.



A e B: dois objetos pontuais como por exemplo na partícula de ouro coloidal.

$A'B'$: paralaxe (diferença algébrica entre as distâncias entre dois pontos nas duas projeções).

$A'B' = p = Mt \operatorname{sen}\theta \qquad (*)_1$

$\Rightarrow\ t = \dfrac{p}{M \operatorname{sen}\theta}$

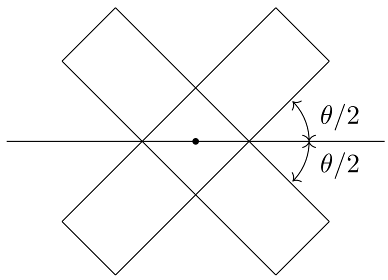
$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{p}{M \operatorname{sen}\theta}\right) = -\dfrac{p\cos\theta}{M \operatorname{sen}^2\theta}$; para θ pequeno, temos:

$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} \approx -\dfrac{p}{M\theta^2} \overset{\text{usando } (*)_1}{\approx} -\dfrac{\cancel{M}t\cancel{\theta}}{\cancel{M}\theta^{\cancel{2}}}$

$\Rightarrow\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta} = -\dfrac{t}{\theta} \ \Rightarrow\ \left|\dfrac{\mathrm{d}t}{t}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\theta}\right|$

$\Rightarrow$ A precisão da medida da espessura, depende da precisão da medida angular.

Caso de *inclinações simétricas* em relação à horizontal



$(*)_2 \quad p = 2Mt \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \ \Rightarrow\ t = \dfrac{p}{2M \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(\frac{p}{2M\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{p\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2M\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)};$$

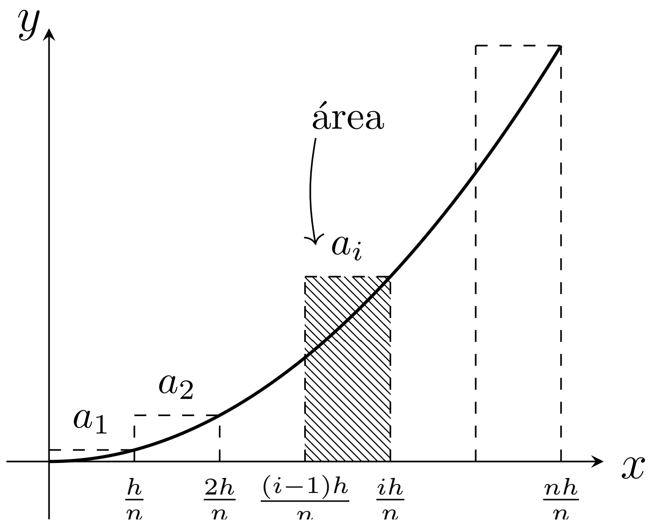
Para $\theta/2$ pequeno, usando $(*)_2$ temos: $\displaystyle\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right)} = -\frac{\cancel{2M}\,t\,\cancel{\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\cancel{2M}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\cancel{2}}}$

$$\Rightarrow \left|\frac{\mathrm{d}t}{t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{\theta}{2}}\right|$$

Capítulo 5

Integrais

Seja calcular a área sob o gráfico de $y = x^2$ aproximando a região por retângulos:



Dividimos o intervalo fechado $[0, h]$ em n pequenos intervalos de igual comprimento, usando os pontos:

$$0\,,\ \frac{h}{n}\,,\ \frac{2h}{n}\,,\ \ldots\,,\ \frac{(i-1)h}{n}\,,\ \frac{ih}{n}\,,\ \ldots\,,\ \frac{(n-1)h}{n}\,,\ \frac{nh}{n}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{c}\text{Sequência de}\\ \text{intervalos fechados}\end{array} \ \left[0, \tfrac{h}{n}\right]\,,\ \left[\tfrac{h}{n}, \tfrac{2h}{n}\right]\,,\ \ldots\,,\ \left[\tfrac{(i-1)h}{n}, \tfrac{ih}{n}\right]\,,\ \ldots\,,\ \left[\tfrac{(n-1)h}{n}, \tfrac{nh}{n}\right]$$

Cada retângulo usando a **altura** com a ordenada da **direita**.

Área do i-ésimo intervalo: $a_i = \left(\dfrac{ih}{n}\right)^2 \cdot \dfrac{h}{n} = \dfrac{h^3 i^2}{n^3}$

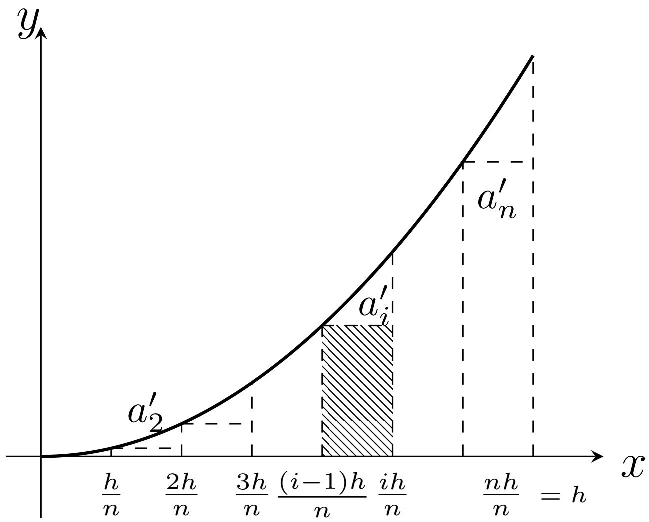
Área total: $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3 i^2}{n^3} = \frac{h^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$

$$\boxed{\underline{\text{OBS:}} \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}$$

$$A_n = \frac{h^3}{n^3} \cdot \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) = \frac{h^3}{6n^2} \left[n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] \left[2n \left(1 + \frac{1}{2n} \right) \right]$$
$$= \frac{h^3}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{1}{2n} \right)$$

Quando $n \to \infty \implies \lim_{n \to \infty} A_n = \frac{h^3}{3}$.

O mesmo problema aproximando "por baixo".



Dividimos o intervalo $[0, h]$ da mesma forma mas a altura do i-ésimo retângulo é a ordenada da esquerda.

$$a'_i = \left[\frac{(i-1)h}{n} \right]^2 \overbrace{\frac{h}{n}}^{\Delta x} = \frac{h^3}{n^3}(i-1)^2$$

Área total: $A'_n = \sum_{i=1}^{n} a'_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{n^3}(i-1)^2 = \frac{h^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$

Pois $A'_n = \dfrac{h^3}{n^3}\left[\dfrac{n}{6}(n+1)(2n+1) - n^2\right] = A_n - \cancelto{0}{\dfrac{h^3}{n}}$ no limite.

$\lim\limits_{n\to\infty} A'_n = \dfrac{h^3}{3} \qquad \Delta x \to 0 \implies \mathrm{d}x$

Teorema 5.0.1. *Seja* $\mathrm{R} = \{(x,y)\,|\, 0 \le x \le h \text{ e } 0 \le y \le x^2\}$. *Então a área de* R *é* $\dfrac{h^3}{3}$.

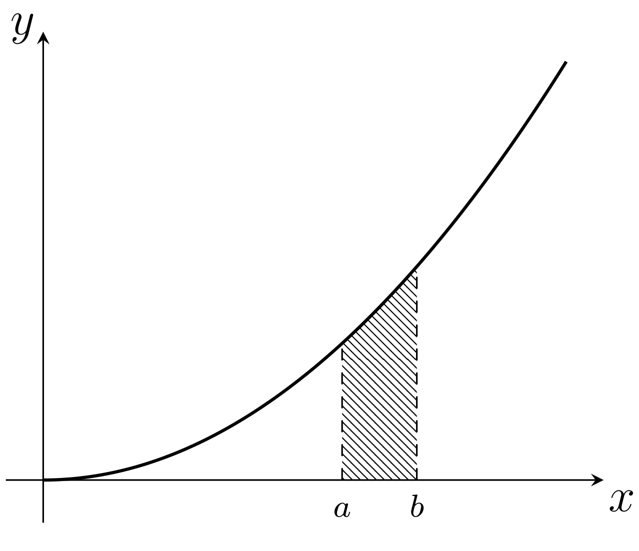
Teorema 5.0.2. *Seja* $\mathrm{R} = \{(x,y)\,|\, 0 \le x \le h \text{ e } 0 \le y \le kx^2\}$ *com* $k > 0$. *Então a área de* R *é* $\dfrac{kh^3}{3}$.

Em geral, para $a < b$ seja

$$\int_a^b kx^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Integral definida)},$$

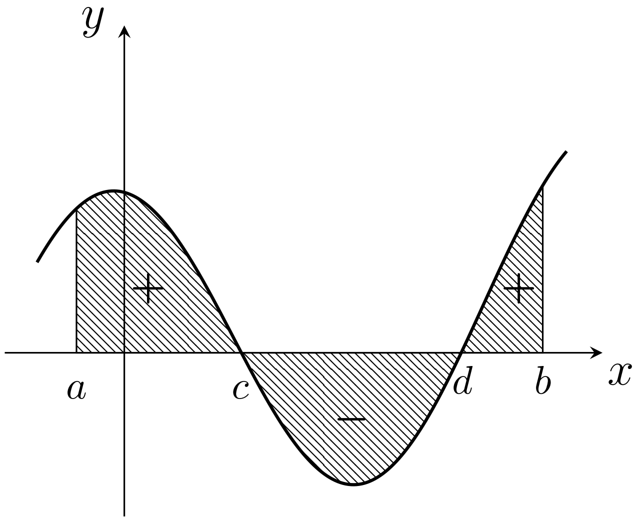
a área da região sob o gráfico de $y = kx^2$ de $x = a$ até b. Então

Teorema 5.0.3. $\displaystyle\int_a^b kx^2\,\mathrm{d}x = \frac{k}{3}\,(b^3 - a^3)$



De forma geral dizemos que a área entre a curva e o eixo das abcissas vale:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

5.1 Propriedades da Integral definida

1) Se c é uma constante:

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2) Se $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$ são contínuas em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b \big[f(x) + g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

3) Se $y = f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e c é tal que $a \le c \le b$, então

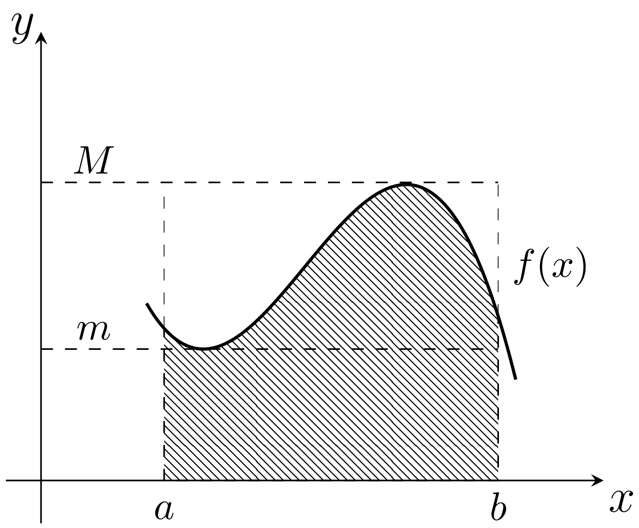
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4) Se $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$ são contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

5) Se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e m e M são os valores mínimo e máximo de f neste intervalo, isto é, $m \leq f(x) \leq M$, então:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

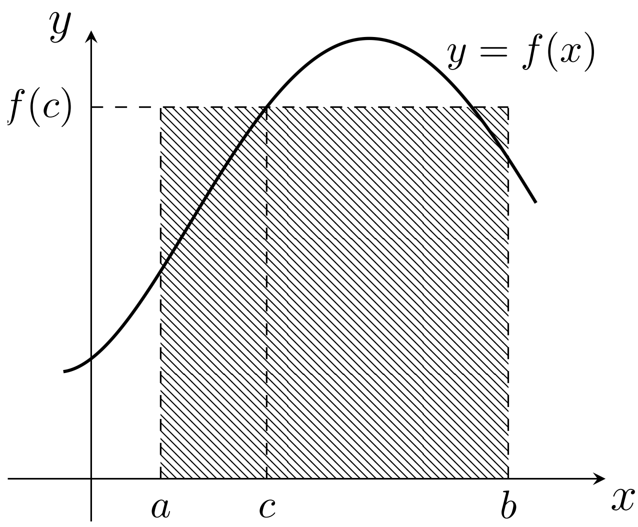


6)

Teorema 5.1.1. *Teorema do valor médio para integrais.*

Se $y = f(x)$ é uma função contínua em $[a, b]$, então existe um número c satisfazendo $a \leq c \leq b$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$



Demonstração.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \leq M$$

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(c) \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)$$

7)

Teorema 5.1.2. ***Teorema Fundamental do Cálculo Integral***
Seja $y = f(x)$ contínua em $[a, b]$ e

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \ \ \textit{para } a \leq t \leq x \leq b$$

Então

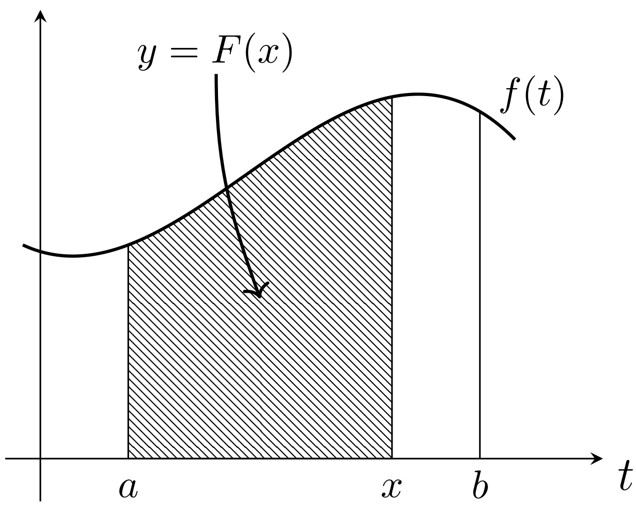
a) $F'(x) = f(x)$, para todo x em (a, b).

b) Se $y = G(x)$ é qualquer função tal que $G'(x) = f(x)$ em (a, b), tem-se:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$$

Demonstração. **a:**

Na figura abaixo, $y = F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ representa a área entre o gráfico, o intervalo $[a, x]$ e as retas $t = a$ e $t = x$.



$$\begin{aligned}\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pela propriedade **6** temos

$$\Delta F = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\epsilon)\big[(x+\Delta x) - x\big] = f(\epsilon)\Delta x$$

para $\boxed{x < \epsilon < x + \Delta x}$. Então:

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{f(\epsilon)\Delta x}{\Delta x} = f(\epsilon)$$

$$\Longrightarrow \quad F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\epsilon) = f(x)$$

Demonstração. **b**:

Pelo item anterior

$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

$F'(x) = f(x)$ em (a, b)

Se $y = G(x)$ goza da propriedade $G'(x) = f(x)$, então

$$F(x) - G(x) = \mathrm{Cte}\ \text{(constante)}$$

Logo

$$F(a) - G(a) = \mathrm{Cte} \implies \mathrm{C} = -G(a)$$

pois $F(a) = 0$ (pela integral).

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) + \mathrm{C}$$

$$\implies \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$$

Fazendo $x = b$ fica

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a)}$$

Podemos escrever também:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(x)\Big|_a^b = G(b) - G(a)$$

Portanto, temos agora um *método* para calcular a integral de qualquer função contínua em $[a, b]$. Basta conhecer a *primitiva* de f, ou seja: G tal que $G'(x) = f(x)$ para todo x em (a, b).

5.2 Técnicas de Integração

5.2.1 Integração por *substituição* ou *mudança de variável.*

Seja $F(x) = f\big(g(x)\big)$, pela regra da cadeia temos:

$$F'(x) = \Big[f\big(g(x)\big)\Big]' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

Segundo o teorema fundamental do Cálculo Integral:

$$\int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[f\big(g(x)\big)\Big]\,\mathrm{d}x = f\big(g(x)\big) + c$$

Fazendo $y = g(x)$, temos

$$\int f'\big(\underbrace{g(x)}_{y}\big)\cdot \underbrace{g'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}y} = \int f'(y)\,\mathrm{d}y = f(y) + c = f\big(g(x)\big) + c$$

Exercícios

1) Encontre uma primitiva para $f(x) = (2x+1)^{1999}$

Solução: Fazer $y = 2x + 1 \implies \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2$ ou $\mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x$; $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{2}$

$$\int (2x+1)^{1999}\,\mathrm{d}x = \int y^{1999}\,\frac{\mathrm{d}y}{2} = \frac{1}{2}\int y^{1999}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{y^{2000}}{2000} + c = \frac{(2x+1)^{2000}}{4000} + c$$

2) Calcule: $\displaystyle\int_0^2 \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+2x+3}}$

Solução: Fazer $y = 2x^2 + 2x + 3$

$\mathrm{d}y = (4x+2)\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}y = 2(2x+1)\,\mathrm{d}x \implies (2x+1)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}y}{2}$.

$$\int_0^2 \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2x^2+2x+3}} = \int_3^{15} \frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}\,\Big|_3^{15} = \sqrt{15} - \sqrt{3}$$

$y(0) = 3$; $y(2) = 15$

3) $\displaystyle\int (3x^3 + 2x^4)\,\mathrm{d}x = \left\{\frac{3x^4}{4} + \frac{2x^5}{5} + c\right\}$

4) $\displaystyle\int (\alpha x^3 y + \beta x^2 y^2)\,\mathrm{d}\beta = \left\{\alpha x^3 y\beta + \frac{\beta^2 x^2 y^2}{2} + c\right\}$

5) $\displaystyle\int \big[\cos(x^2+1)\big]2x\,\mathrm{d}x$

$u = x^2 + 1$

$\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$

$$\int \big[\cos(x^2+1)\big]2x\,\mathrm{d}x = \int \cos u\,\mathrm{d}u = \operatorname{sen} u + c = \{\operatorname{sen}(x^2+1) + c\}$$

6) $\displaystyle\int e^{x^2+1}\cdot 2x\,\mathrm{d}x$

$$u = x^2+1 \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \implies \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$$

$$\int e^{x^2+1}\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int e^u\,\mathrm{d}u = \{e^u + c\} = \left\{e^{x^2+1} + c\right\}$$

7) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(t^2+1)2t\,\mathrm{d}t = \int \operatorname{sen} u\,\mathrm{d}u = \{-\cos u + c\} = \{-\cos(t^2+1) + c\}$

$u = t^2 + 1;\ \mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$

8) $\displaystyle\int (x^2+1)^7 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u^7\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{1}{2}\,\frac{u^8}{8} + c\right\} = \left\{\frac{(x^2+1)^8}{16} + c\right\}$

$u = x^2 + 1$

$$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \implies x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2}$$

9) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad (x > 0)$

$u = \sqrt{x}$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \implies \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$$

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \cos u\,\mathrm{d}u = 2\,\{\operatorname{sen} u + c\} = 2\,\{\operatorname{sen}\sqrt{x} + c\}$$

10) $\displaystyle\int e^{\cos x}\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\int e^u\,\mathrm{d}u = \{-e^u + c\} = \{-e^{\cos x} + c\}$

$u = \cos x$

$\mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

11) $\displaystyle\int (x^2+1)^2\,\mathrm{d}x = \int (x^4 + 2x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \left\{\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c\right\}$

12) $\displaystyle\int (1+x^2)^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u^3\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}+c\right\} = \left\{\frac{1}{8}(1+x^2)^4+c\right\}$

$u = 1+x^2$

$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

13) $\displaystyle\int (x^2+t^2)^3 tx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int u^3 t\,\mathrm{d}u = \frac{t}{2}\int u^3\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{t}{2}\cdot\frac{u^4}{4}+c\right\}$

$\displaystyle = \left\{\frac{t(u^2+t^2)^4}{8}+c\right\}$

$u = x^2+t^2$

$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

14) $\displaystyle\int (1+\sqrt{x})^3\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\int u^3\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{2u^4}{4}+c\right\} = \left\{\frac{(1+\sqrt{x})^4}{2}+c\right\}$

$u = 1+\sqrt{x}$

$\displaystyle\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

15) $\displaystyle\int (e^x+2)^4 e^x\,\mathrm{d}x = \int u^4\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{u^5}{5}+c\right\} = \left\{\frac{(e^x+2)^5}{5}+c\right\}$

$u = e^x+2$

$\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$

16 $\displaystyle\int (1+\operatorname{tg} x)^{3/2}\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int u^{3/2}\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{2}{5}u^{5/2}+c\right\} = \frac{2}{5}\left\{(1+\operatorname{tg} x)^{5/2}+c\right\}$

$u = 1+\operatorname{tg} x$

$\mathrm{d}u = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$

17) $\displaystyle\int (e^x+e^{-x})^2\cdot(e^x-e^{-x})\,\mathrm{d}x = \int u^2\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{u^3}{3}+c\right\} = \left\{\frac{(e^x+e^{-x})^3}{3}+c\right\}$

$u = e^x+e^{-x}$

$\mathrm{d}u = (e^x-e^{-x})\,\mathrm{d}x$

18 $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{1}{2}\int u^{-2}\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{1}{2}(-u^{-1})+c\right\} = \left\{\frac{1}{2}\,\frac{-1}{1+x^2}+c\right\} =$
$\displaystyle\left\{\frac{-1}{2(1+x^2)}+c\right\}$

$u = 1+x^2$

$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

19) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \left\{\frac{1}{2}\log u + c\right\}$

$u = 1 + x^2$

$\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

20) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{u^2}{2} + c\right\} = \left\{\frac{(\ln x)^2}{2} + c\right\}$, $x > 0$, não definida para $x \leq 0$

$u = \ln x$

$\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\cdot \mathrm{d}x$

21) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{u^2}{2} + c\right\} = \left\{\frac{1}{2}\cdot \operatorname{sen}^2 x + c\right\}$

$u = \operatorname{sen} x$

$\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$

22) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos x = \int u^2\,\mathrm{d}u = \left\{\frac{u^3}{3} + c\right\} = \left\{\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + c\right\}$

$u = \operatorname{sen} x$

$\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$

23) $\displaystyle\int \cos^2 x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\int u^2\,\mathrm{d}u = \left\{-\frac{u^3}{3} + c\right\} = \left\{-\frac{cos^3 x}{3} + c\right\}$

$u = \cos x$

$\mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

24 $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \{-\theta + \operatorname{tg}\theta + c\}$

OBS: $y = \operatorname{tg}\theta$

$y' = 1 + \operatorname{tg}^2\theta \implies \displaystyle\int \operatorname{tg}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\int \mathrm{d}\theta + \int \mathrm{d}y$

25) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \left\{\frac{1}{u} + c\right\} = \left\{\frac{1}{\cos\theta} + c\right\}$

$u = \cos\theta$

$\mathrm{d}u = -\operatorname{sen}\theta\,\mathrm{d}\theta$

26) $\int (2\,\mathrm{sen}^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta = 2\int \mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\theta - \int \mathrm{d}\theta = \cancel{2}\int \frac{(1-\cos 2\theta)}{\cancel{2}}\,\mathrm{d}\theta - \int \mathrm{d}\theta =$
$\int \mathrm{d}\theta - \int \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta - \int \mathrm{d}\theta = \left\{ -\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2} + c \right\}$

OBS: $\cos 2\theta = 1 - \mathrm{sen}^2\theta$

27) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,\mathrm{d}x = \int u^3\,\mathrm{d}x = \left\{ \frac{u^4}{4} + c \right\} = \left\{ \frac{(\ln x)^4}{4} \right\}$

$u = \ln x$

$\mathrm{d}u = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x$

5.2.2 Integração por *partes*

Sejam duas funções diferenciáveis u e v.

$$\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$$

Integrando ambos os membros:

$$\int \mathrm{d}(uv) = \int u\,\mathrm{d}v + \int v\,\mathrm{d}u$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$uv + C = \int u\,\mathrm{d}v + \int v\,\mathrm{d}u$$

$$\boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u + C}$$

Ex. Calcule:

1) $\int xe^{2x}\,\mathrm{d}x = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x = \left\{ \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + c \right\}$

$u = x \implies \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = e^{2x}\,\mathrm{d}x \implies v = \frac{e^{2x}}{2}$

2) $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{sen}\,x - \int \mathrm{sen}\,x\,\mathrm{d}x = \{x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + c\}$

$u = x$; $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$; $v = \mathrm{sen}\,x$

3) $\displaystyle\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \{x\ln x - x + C\}$

$u = \ln x;\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x;\ v = x$

4) $\displaystyle\int \ln^2 x\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - \int \cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,\mathrm{d}x = x\ln^2 x - 2\int \ln x\,\mathrm{d}x$

$= \left\{x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C\right\}$

$u = \ln^2 x;\ \mathrm{d}u = 2\ln x\,\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x;\ v = x$

5) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}\,ax\,\mathrm{d}x = -\frac{x\cos ax}{a} + \int\frac{\cos ax}{a}\,\mathrm{d}x = \left\{-\frac{x\cos ax}{a} + \frac{\mathrm{sen}\,ax}{a^2} + c\right\}$

$= \left\{\left(\dfrac{-x}{a}\right)\cos ax + \left(\dfrac{1}{a^2}\right)\,\mathrm{sen}\,ax + c\right\}$

$u = x;\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = \,\mathrm{sen}\,ax;\ v = -\dfrac{\cos ax}{a}$

6) $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = e^{ax}\cdot\frac{\mathrm{sen}\,bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,\mathrm{d}x$

$u = e^{ax};\ \mathrm{d}u = ae^{ax}\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = \cos bx\,\mathrm{d}x;\ v = \dfrac{\mathrm{sen}\,bx}{b}$

$(*)\displaystyle\int e^{ax}\,\mathrm{sen}\,bx\,\mathrm{d}x = -e^{ax}\,\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$

$U = e^{ax};\ \mathrm{d}U = ae^{ax}$

$\mathrm{d}V = \,\mathrm{sen}\,bx\,\mathrm{d}x;\ V = -\dfrac{\cos bx}{b}$

Voltando na expressão inicial:

$$\begin{aligned}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x &= e^{ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{b} - \frac{a}{b}\left[-e^{ax}\frac{\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\right]\\ &= e^{ax}\frac{\operatorname{sen} bx}{b} + \frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\,\left[1+\frac{a^2}{b^2}\right] = \frac{e^{ax}\operatorname{sen} bx}{b} + \frac{ae^{ax}\cos bx}{b^2}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{\cancel{b^2}}{a^2+b^2}\left[\frac{be^{ax}\operatorname{sen} bx + ae^{ax}\cos bx}{\cancel{b^2}}\right]$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \left\{\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right)\cdot e^{ax}\cdot[b\operatorname{sen} bx + a\cos bx] + C\right\}$$

7) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x$

$u = x^2$; $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$; $v = -\cos x$

$$2\int x\cos x\,\mathrm{d}x = 2\left\{x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x\right\} = 2\left\{x\operatorname{sen} x + \cos x + C\right\}$$

$U = x$; $\mathrm{d}U = \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}V = \cos x\,\mathrm{d}x$; $V = \operatorname{sen} x$

$$\Longrightarrow \int x^2\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C$$

8) $\displaystyle\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x\,\mathrm{d}x$

$u = x^2$; $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x$; $v = e^x$

$$2\int xe^x\,\mathrm{d}x = 2\left\{xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\right\} = 2xe^x - 2e^x + C$$

$U = x$; $\mathrm{d}U = \mathrm{d}x$

$\mathrm{d}V = e^x\,\mathrm{d}x$; $V = e^x$

$$\Longrightarrow \int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

9) $$\int x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \int \frac{x^{\cancel{3}2}}{3} \cdot 2\ln x \,\frac{1}{\cancel{x}_1}\,\mathrm{d}x$$

$$u = \ln x;\ \mathrm{d}u = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x;\ v = \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{2}{3}\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^{\cancel{3}2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}_1}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$U = \ln x;\ \mathrm{d}U = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}V = x^2\,\mathrm{d}x;\ V = \frac{x^3}{3}$$

$$\Longrightarrow \int x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln^2 x}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\int x^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2x^3}{9}\ln x + \frac{2}{27}x^3 + C$$

Ex. Calcule as integrais:

1) $$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2\left(\frac{x}{5}\right)}$$

$$= 5\int_0^{\pi/5} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)}$$

$$= 5\int_0^{\pi/5} \sec^2(u)\,\mathrm{d}u$$

$$u = \tfrac{x}{5} \quad \begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ x = \pi \Rightarrow u = \tfrac{\pi}{5} \end{cases}$$

$$\mathrm{d}u = \tfrac{\mathrm{d}x}{5} \Rightarrow \mathrm{d}x = 5\mathrm{d}u$$

$$= 5\operatorname{tg}(u)\Big|_{\pi/5}^{0}$$

$$= 5\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{5}\right) - 5\cancelto{0}{\operatorname{tg}(0)}$$

$$= 5\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{5}\right)$$

2) $$\int_{\pi/8}^{\pi/4} \operatorname{cotg}^2(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{cotg}^2(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \tfrac{1}{2}[-\operatorname{cotg} u - u]\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$x = \tfrac{\pi}{8} \Rightarrow u = \tfrac{\pi}{4}$$

$$u = 2x$$

$$x = \tfrac{\pi}{4} \Rightarrow u = \tfrac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \tfrac{\mathrm{d}u}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\left(-\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2}\right) - \left(-\operatorname{cotg}\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\left(0 - \tfrac{\pi}{2}\right) - \left(-1 - \tfrac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$= -\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{8} = \tfrac{-2\pi+4+\pi}{8}$$
$$= \tfrac{4-\pi}{8}$$

3) Encontre os números A e B tais que a função $f(x) = A\cdot 2^x + B$ satisfaça as condições $f'(1) = 2$; $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 7$.

Solução:

$$f'(x) = A \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

$$f'(1) = A \cdot \cancel{2} \cdot \ln 2 = \cancel{2} \implies A = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 (A\cdot 2^x + B)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x + B\right)\mathrm{d}x$$

$$\implies \frac{1}{\ln 2}\int_0^3 2^x\,\mathrm{d}x + \int_0^3 B\,\mathrm{d}x = 7$$

$$\implies \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}\Bigg|_0^3 + Bx\Big|_0^3 = 7$$

$$\frac{8}{\ln^2 2} - \frac{1}{\ln^2 2} + 3B = 7$$

$$8 - 1 + 3B\ln^2 2 = 7\ln^2 2$$

$$7 + 3B\ln^2 2 = 7\ln^2 2$$

$$B = \frac{7(\ln^2 2 - 1)}{3\ln^2 2}$$

4) Encontre $\alpha > 0$ para que a desigualdade $\int_{-\alpha}^{\alpha} e^x\,\mathrm{d}x > 3/2$ seja verdadeira.

Solução:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^x\,\mathrm{d}x = e^{\alpha} - e^{-\alpha}$$

$$e^{\alpha} - e^{-\alpha} > \frac{3}{2}$$

$$e^{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}} > \frac{3}{2}; \qquad \boxed{\begin{array}{l}\text{fazer } y = e^{\alpha} \\ \text{Obs.: } y > 0\end{array}}$$

$$\Longrightarrow\ y - \frac{1}{y} > \frac{3}{2}$$

$$y - \frac{1}{y} - \frac{3}{2} > 0$$

$$y^2 - 1 - \frac{3}{2}y > 0$$

<u>Resolver:</u> $y^2 - \frac{3}{2}y - 1 = 0$

$$y = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4}}{2}$$

$$y = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2}$$

$$y = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}}{2} \begin{array}{l} \nearrow\ y_1 = \frac{\frac{8}{2}}{2} = \frac{8}{4} = 2 \\ \\ \searrow\ y_2 = \frac{-\frac{2}{2}}{2} = \cancel{\frac{2}{4}} \end{array}$$

$$y_1 = 2 \implies 2 = e^{\alpha} \implies \boxed{\alpha = \ln 2}$$

Voltando à inequação: $\boxed{\alpha > \ln 2}$

5.2.3 Método das Frações Parciais

Seja $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, uma fração racional. Caso o grau do polinômio $f(x)$ seja menor do que o de $g(x)$, dizemos que $F(x)$ é uma fração racional própria. Caso contrário, $F(x)$ será uma fração racional imprópria. Neste segundo caso, $F(x)$ poderá ser representada como a soma de um polinômio com uma fração racional própria.

<u>Exemplo:</u> $\dfrac{x^5}{x^4+1} = x - \dfrac{x}{x^4+1}$

Uma fração racional própria pode ser expressa como soma de "frações parciais", cujos denominadores são da forma $(ax+b)^n$ ou $(ax^2+bx+c)^n$, com n um inteiro positivo. Considerando a natureza dos fatores do polinômio do denominador, estudaremos os seguintes casos:

1º caso: A cada fator do tipo $ax+b$ que aparece uma vez no denominador de uma fração racional própria, corresponderá uma fração parcial do tipo $\frac{A}{ax+b}$, onde A é uma constante a ser determinada.

Exemplo 1: Encontrar $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}$

Solução:

$x^2-4=(x-2)(x+2)$

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}\ \Rightarrow\ 1=A(x+2)+B(x-2)$$

$\Rightarrow\ 1=(A+B)x+(2A-2B)$

$$\begin{cases} A+B=0 & \Rightarrow\ B=-A \\ 2A-2B=1 & \Rightarrow\ 2A+2A=1\ \Rightarrow\ \boxed{A=\dfrac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{B=-\frac{1}{4}}$$

$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{\frac{1}{4}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+2}$$

$$\Rightarrow\ \int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-2}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}$$

$$=\boxed{\frac{1}{4}\ln(x-2)-\frac{1}{4}\ln(x+2)+c}$$

Exemplo 2: Calcular $\displaystyle\int\frac{5x-2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

Solução:

$$\frac{5x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

$\Rightarrow\ 5x-2=A(x+2)+B(x-2)$

$5x-2=(A+B)x+(2A-2B)$

$\Rightarrow\ A+B=5\ \Rightarrow\ A=5-B\ (*)$

$\cancel{2}A-\cancel{2}B=-\cancel{2}\ \Rightarrow\ A=B-1$

$\Rightarrow\ 5-B=B-1\ \Rightarrow\ 2B=6\ \Rightarrow\ \boxed{B=3}$

$(*)\, A = 5 - 3 \Rightarrow \boxed{A = 2}$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x+2}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-4}\,\mathrm{d}x = \{2\ln|x-2| + 3\ln|x+2| + c\}$

Exercício: Calcular $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$

2º caso: Quando o polinômio do denominador da função racional própria pode ser decomposta em fatores lineares do tipo $ax+b$, aparecendo n vezes. Neste caso, podemos escrever:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}\,,$$

com A_1, A_2, ..., A_n, constantes a serem determinadas.

Exemplo 1: Encontrar $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$

Solução:

Fatorando o denominador, temos:

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$

$\Rightarrow \dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\ 3x+5 &= A(x^2-2x+1) + B(x^2-1) + C(x+1)\\ 3x+5 &= Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - B + Cx + C\\ &= (A+B)x^2 + (C-2A)x + A - B + C\end{aligned}$$

$$\begin{cases} A+B=0 & \Rightarrow B=-A\\ -2A+C=3 & \Rightarrow C=3+2A\\ A-B+C=5 & \Rightarrow A-(-A)+(3+2A)=5\end{cases}$$

$\Rightarrow 4A = 2 \Rightarrow \boxed{A = \dfrac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{B = -\dfrac{1}{2}}\,;\ C = 3 + 2\times\dfrac{1}{2} = \boxed{4}$

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{4}{x-1} + c\end{aligned}$$

Exemplo 2: Encontrar $\displaystyle\int \frac{x-1}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x$

Solução:

$\dfrac{x-1}{(x-2)^3} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{(x-2)^2} + \dfrac{C}{(x-2)^3}$

$\Rightarrow\ x-1 = A(x-2)^2 + B(x-2) + C \qquad (*)$

Fazendo $x = 1$ temos:

$2-1 = C\ \Rightarrow \boxed{C = 1}$

Derivando a expressão $(*)$ e fazendo $x = 2$ novamente, temos:

$-1 = 2A(x-2) + B$

$\Rightarrow\ -1 = 2A \times 0 + B\ \Rightarrow \boxed{B = -1}$

Derivando novamente, temos:

$0 = 2A\ \Rightarrow \boxed{A = 0}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \frac{x-1}{(x-2)^3}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^3}\\ &= \left\{\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2(x-2)^2} + c\right\}\end{aligned}$$

3º caso: Quando o polinômio do denominador de uma fração racional própria pode ser decomposto em fatores lineares e quadráticos, tendo estes últimos multiplicidade um, a cada fator do 2º grau irredutível, corresponderá uma fração racional própria do tipo:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \text{ com } A \text{ e } B \text{ constantes a serem determinadas.}$$

Exemplo 1: Encontre $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x}$

Solução:

Fatorando o denominador, temos:

$x^3 + x = x^2(x+1)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x^3+x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$\Rightarrow 1 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$

$\Rightarrow 1 = (A+B)x^2 + Cx + A$

$A + B = 0$

$\boxed{C = 0}$

$\boxed{A = 1} \Rightarrow \boxed{B = -1}$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$$
$$= \left\{ \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c \right\}$$

Exemplo 2: Encontre $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$

Solução:

$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

$\dfrac{x^2+2}{x^3-1} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$$\begin{aligned} x^2+2 &= A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \\ &= (A+B)x^2 + (A-B+C)x + (A-C) \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema: $\begin{aligned} A + B &= 1 \\ A - B + C &= 0 \\ A - C &= 2 \end{aligned}$

temos: $A = 1$; $B = 0$; $C = -1$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{Bx+C}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$

<u>OBS.:</u> Complementando o quadrado:

Todo polinômio quadrático ax^2+bx+c, pode ser escrito como $a\big[(x-p)^2+r\big]$.

Fazendo para o denominador da segunda integral, temos:

$$x^2+x+1 = 1 \times \big[(x-p)^2+1\big]$$

Por comparação temos:

$x^2+x+1 = x^2-2px+p^2+r = x^2-2px+(p^2+r)$

$1 = -2p \;\Rightarrow\; \boxed{p = -\frac{1}{2}}$

$1 = p^2+r \;\Rightarrow\; 1 = \frac{1}{4}+r \;\Rightarrow\; \boxed{r = \frac{3}{4}}$

$\Rightarrow\; x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+\frac{3}{4}}$

<u>OBS.:</u> Agora, devemos transformar o denominador da segunda integral realizando a substituição:

$$u = \frac{x-p}{q}\ (\text{ou } x = qu+p)\,, \qquad \text{onde } q^2 = r\,.$$

A substituição transformará o denominador em:

$$aq^2(u^2+1)\,.$$

No caso geral, a integral ficaria:

$$\begin{aligned}\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{R(qu+p)}{aq^2(u^2+1)}\,\mathrm{d}(qu+p)\\ &= A\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2+1} + B\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}\\ &= \frac{1}{2}A\ln(u^2+1) + B\,\mathrm{arctg}\,(u^2+1) + C\end{aligned}$$

No caso particular do problema, $R(x) = 1$, então, temos:

$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$, pela transformação fica:

$$\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}u - \frac{1}{2}\right)}{1 \times \frac{3}{4}(u^2+1)} = \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}u}{u^2+1}$$

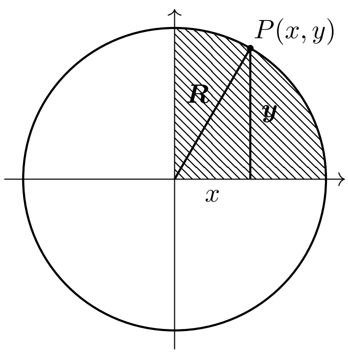
$$= \frac{4}{3} \times \sqrt{\frac{3}{4}}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg} u + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2+2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \ln(x-1) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + c$$

$$= \boxed{\ln(x-1) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c}$$

$$\boxed{\begin{gathered} a = 1 \\ p = -\frac{1}{2} \\ q^2 = r = \frac{3}{4} \\ q = \sqrt{\frac{3}{4}} \\ x = \sqrt{\frac{3}{4}}u - \frac{1}{2} \\ \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u \end{gathered}}$$

5.3 Cálculo da área do círculo



A região hachurada corresponde a 1/4 da área total A, sendo: R o raio da circunferência; x e y as abcissas e ordenadas, respectivamente, dos pontos da circunferência, com $y = f(x)$.
Então, podemos escrever:

$$A = 4\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x = 4\int_0^R \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Neste tipo de integral fazemos a substituição trigonométrica $x = R\operatorname{sen}\theta$, o que leva à nova expressão:

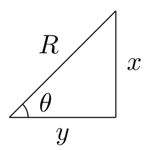
$$A = 4\int \sqrt{R^2 - (R\operatorname{sen}\theta)^2}\cdot R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

Os novos limites da integração serão:

Para $x = 0 \Rightarrow 0 = R\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \boxed{\theta = 0}$

Para $x = R \Rightarrow R = R\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

Considerando um triângulo do tipo:



$x = R\operatorname{sen}\theta$
$\mathrm{d}x = R\cos\theta\mathrm{d}\theta$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ A &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \operatorname{sen}^2\theta}\cdot R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

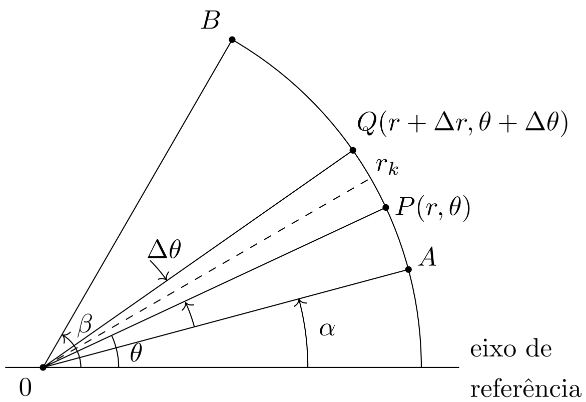
Utilizando a relação conhecida: $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$, fica:

$$A = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 2\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos:

$$A = 4R^2\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4R^2\left(\frac{\pi}{4}+0\right) = \pi R^2$$

5.4 Áreas em coordenadas polares



A área AOB pode ser considerada como a soma de setores circulares com intervalos angulares:

$$\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n},$$

com n um número inteiro representando o número de subdivisões do intervalo total $\beta-\alpha$.

Então, a área total AOB será a soma das áreas elementares $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$. Este somatório fica:

$$A = \sum_{\theta=\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\, r_k^2\, \Delta\theta = \lim_{\substack{\Delta\theta \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{\theta=\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\big[f(\theta_k)\big]^2 \Delta\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big[f(\theta)\big]^2\,\mathrm{d}\theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,\mathrm{d}\theta}$$

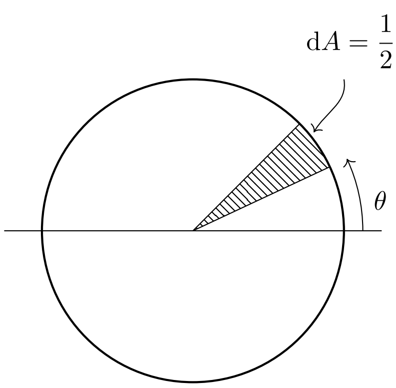
OBS: $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\underbrace{r\,\mathrm{d}\theta}_{\text{arco}} \times \underbrace{r}_{\text{raio}} = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta;\ A = \int \mathrm{d}A$

Exemplo: Área do círculo de raio R:

$$A = 2 \times \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\, R^2\,\mathrm{d}\theta = \cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}} R^2 \times \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$= R^2 \times \pi = \boxed{\pi R^2}$$

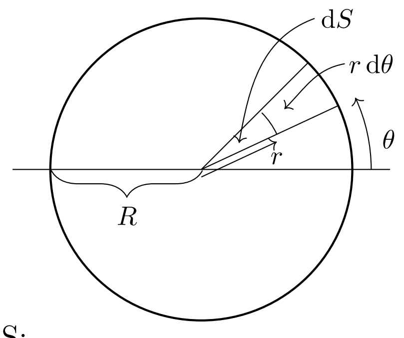
Exemplo: Determinar a área interior ao círculo com raio R.



$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, R^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\, R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

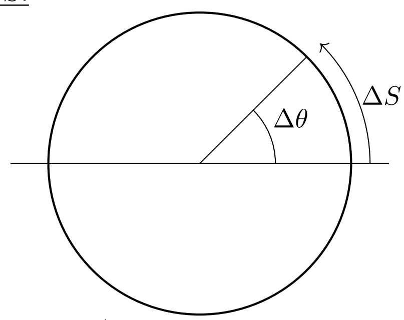
$$\Rightarrow A = \frac{1}{\cancel{2}}\, R^2\, \cancel{2}\pi = \boxed{\pi R^2}$$

ou



$$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$$
$$\mathrm{d}A = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$A = \int_0^R r\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{R^2}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi = \pi R^2$$

OBS:



$$\frac{\Delta S}{\Delta\theta} = r \Rightarrow \boxed{\Delta S = r\Delta\theta}$$

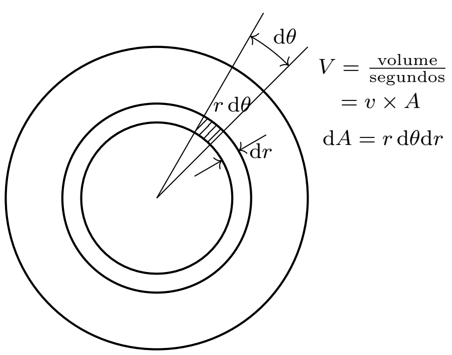
Exemplo: Aproximação do volume de sangue que flui por segundo através de uma seção transversal de um vaso de grande calibre.

Solução:

A lei de Poiseuille (1842) para o fluxo laminar num tubo cilíndrico afirma:

$$\boxed{v = k(R^2 - r^2)\ \mathrm{cm/s}}$$

Neste problema, vamos aproximar o sangue por um fluido homogêneo pois os elementos figurados do sangue têm diâmetro $\ll$ diâmetro do vaso.



seção transversal do vaso

v: velocidade do fluxo;

k: constante dependente de vários fatores tais como: comprimento do vaso, diferença de pressão entre os extremos, viscosidade do fluido, etc.;

R: raio do vaso;

r: distância do centro da seção circular até um ponto deste plano que secciona o vaso;

V: volume do sangue;

A: área da seção transversal do vaso.

$\mathrm{d}V = k(R^2 - r^2)r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$; V: volume/seg

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R k(R^2 - r^2)r\,\mathrm{d}r = 2\pi\left[\int_0^R kR^2 r\,\mathrm{d}r - \int_0^R kr^3\,\mathrm{d}r\right]$$

$$= 2\pi\left[kR^2\left(\frac{r^2}{2}\right)\Big|_0^R - k\frac{r^4}{4}\Big|_0^R\right] = 2\pi\left(\frac{kR^4}{2} - \frac{kR^4}{4}\right)$$

$$= \frac{2\pi kR^4}{4}\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s} = \boxed{\frac{\pi kR^4}{2}\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}}$$

5.5 Exercícios

Calcule a integral definida: $I = \displaystyle\int_0^1 e^{\,\mathrm{arcsen}\,x}\,\mathrm{d}x$

Solução:

- Fazer $\mathrm{arcsen}\,x = t \Rightarrow x = \mathrm{sen}\,t$; $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$
- Novos limites de integração: para $x = 0,\ t = 0$
  $x = 1,\ t = \pi/2$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi/2} e^t \cos t\,\mathrm{d}t \quad (*)_1$$

Integrando por partes, temos:

$$\left.\begin{aligned} &e^t = u\,;\ \mathrm{d}u = e^t\,\mathrm{d}t \\ &\cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}v\,;\ v = \mathrm{sen}\,t \end{aligned}\right\}\ \boxed{\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u}$$

$$\Rightarrow I = [e^t\,\mathrm{sen}\,t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,t\,e^t\,\mathrm{d}t \quad (*)_2$$

Integrando por partes, novamente, temos:

$e^t = u$; $\mathrm{d}u = e^t\,\mathrm{d}t$

$\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}v$; $v = -\cos t$

$$\int_0^{\pi/2} e^t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t = [-e^t\cos t]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos t)e^t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{\pi/2} e^t\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{d}t = [-e^t\cos t]_0^{\pi/2} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} e^t\cos t\,\mathrm{d}t}_{I} \quad (*)_3$$

De $(*)_1$, $(*)_2$ e $(*)_3$, temos $\Rightarrow I = [e^t\,\mathrm{sen}\,t]_0^{\pi/2} - [-e^t\cos t]_0^{\pi/2} - I$

$\Rightarrow\ 2I = [e^t \operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} - [-e^t \cos t]_0^{\pi/2}$

$I = \dfrac{1}{2}[e^t \operatorname{sen} t]_0^{\pi/2} - \dfrac{1}{2}[-e^t \cos t]_0^{\pi/2}$

$I = \dfrac{1}{2}\, e^{\pi/2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(e^{\pi/2} - 1)$

Capítulo 6

Equações Diferenciais

6.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Grande parte de fenômenos da natureza, científicos ou tecnológicos, podem ser expressos por equações diferenciais.

As equações diferenciais são um tipo de equações que apresentam derivadas ou diferenciais de uma dada função.

Exemplo: Seja a equação algébrica $x^2 + y^2 = a$, sendo $y = f(x)$ e a uma constante.

Ao diferenciarmos esta equação em relação a x, obteremos a seguinte equação diferencial:

$(*)$ $$2x + 2yy' = 0 \quad \text{ou} \quad x + yy' = 0$$

No presente capítulo, estudaremos alguns tipos de equações diferenciais. Para isto, é importante classificá-las.

Em particular, quando a equação envolve duas variáveis, sendo possível ocorrer derivadas em relação a apenas uma delas, denominamos "equação diferencial ordinária". Este será o tipo principal tratado no capítulo.

Definições

Equação diferencial ordinária:

É uma relação entre as variáveis x e y, e pelo menos uma das derivadas y', y'', ..., $y^{(n)}$ de y em relação a x.

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Ordem da equação diferencial:

É o expoente da maior derivada na relação funcional.

Grau da equação:

É o expoente da maior derivada.

Equação linear:

Equação em que y e todas as derivadas (mas não x) aparecem linearmente. Pode ser escrita como:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y = Q(x)$$

Soluções de uma equação diferencial

Uma solução de uma equação diferencial é uma equação tal que, se as variáveis as satisfazem, ela e suas diferenciais ou derivadas satisfazem à equação diferencial.

<u>Exemplo:</u> Se c é uma constante,

$$x^2 - xy = c \qquad (*)_1$$

é solução da equação

$$(2x - y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0 \qquad (*)_2$$

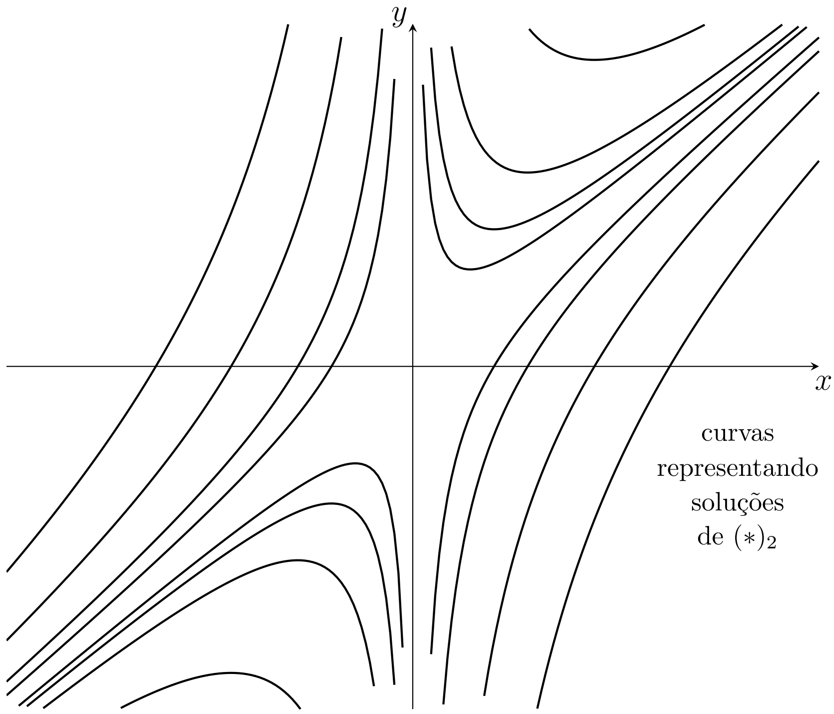
pois, diferenciando $(*)_1$ obtemos $(*)_2$.

Veja:

$$\begin{aligned} 2x - \left(y + x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) &= 0 \\ 2x - y - x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ 2x\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y &= 0 \\ (2x - y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y &= 0 \end{aligned}$$

Então, se x e y variam de tal forma a satisfazer $(*)_1$, elas e suas diferenciais satisfazem $(*)_2$.

Como a constante c pode ter qualquer valor, a equação diferencial tem infinitas soluções. Plotando x, y no plano cartesiano, cada solução será representada por uma curva.



A *primitiva* de uma equação diferencial, é uma relação entre variáveis e n constantes arbitrárias, como por exemplo $y = Ax^2 + Bx$. Ela dará origem a uma equação diferencial livre de constantes arbitrárias, a partir de $n+1$ equações, quais sejam, a própria primitiva e as n equações provenientes de n derivadas sucessivas da primitiva.

Exercício 1: Classifique as equações ordinárias abaixo.

a) $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + 3xy = 0$

b) $y' = 10 + y$

c) $\mathrm{d}y + (xy - \cos x)\mathrm{d}x = 0$

d) $y'' + 4y = x$

e) $(y')^2 - y' + 2y = x^2$

f) $\sqrt{r' + r} = 2 \operatorname{sen} \theta$

g) $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}v^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x \left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + v = 0$

h) $y''' + y^2 = 2x$

Resposta: a) 3ª ordem, 1º grau; b) 1ª ordem, 1º grau; c) 1ª ordem, 1º grau; d) 2ª ordem, 1º grau; e) 1ª ordem, 2º grau; f) 1ª ordem, 1º grau; g) 2ª ordem, 1º grau; h) 3ª ordem, 1º grau.

Exercício 2: Verifique que as funções abaixo são soluções das equações diferenciais indexadas. Diga se cada solução é solução particular ou primitiva (solução geral).

a) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$; $xy' + y = \cos x$

b) $y = x\sqrt{1-x^2}$; $yy' = x - 2x^3$

c) $y = \dfrac{c}{\cos x}$; $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0$

d) $x^2 + y^2 = c$; $yy' + x = 0$

e) $y = e^x(1-x)$; $y'' - 2y' + y = 0$

f) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$; $y'' - y = 0$

Resposta:

a) $y' = \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2}$

$\cancel{x} \cdot \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^{\cancel{2}}} + y = \cos x \Rightarrow x\cos x - \operatorname{sen} x + xy = x\cos x$

$xy = \operatorname{sen} x \Rightarrow \boxed{y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$ solução particular

b) $y' = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

$y' = \dfrac{(1-x^2) - x^2}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y' = \dfrac{(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow y \times \dfrac{(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x - 2x^3$

$y = \dfrac{x\sqrt{1-x^2} - 2x^3\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$

$$y = \frac{(x-2x^3)\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2} = \frac{x\cancel{(1-2x^2)}\sqrt{1-x^2}}{\cancel{1-2x^2}}$$

$\boxed{y = x\sqrt{1-x^2}}$ solução particular

c) $y' = \dfrac{c \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = c\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x}$

$\Rightarrow\ c\dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - y \operatorname{tg} x = 0$

$y \cancel{\operatorname{tg} x} = c\dfrac{\cancel{\operatorname{tg} x}}{\cos x}$

$\boxed{y = \dfrac{c}{\cos x}}$ solução geral

d) $y^2 = c - x^2 \ \Rightarrow\ y = \sqrt{c-x^2}$

$y' = \dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{c-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{c-x^2}} \ \Rightarrow\ y \times \dfrac{(-x)}{\sqrt{c-x^2}} + x = 0$

$\Rightarrow\ -\cancel{x}y + \cancel{x}\sqrt{c-x^2} = 0$

$\Rightarrow\ y = \sqrt{c-x^2}\ \Rightarrow\ \boxed{x^2 + y^2 = c}$ solução geral

e) $y' = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x)$

$y'' = e^x(2+x) + e^x = e^x(3+x)$

$\Rightarrow\ e^x(3+x) - 2e^x(2+x) + y = 0$

$e^x(3+x-4-2x) + y = 0$

$e^x(-1-x) + y = 0$

$y - e^x(1+x) = 0$

$\boxed{y = e^x(1+x)}$ solução particular

f) $y' = c_1e^x - c_2e^{-x}$

$y'' = c_1e^x + c_2e^{-x}$

$\Rightarrow\ c_1e^x + c_2e^{-x} - y = 0$

$\boxed{y = c_1e^x + c_2e^{-x}}$ solução geral

6.2 Equações separáveis

Se a equação diferencial tem a forma

$$f_1(x)\,\mathrm{d}x + f_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

as variáveis são ditas separadas, e portanto, cada termo é uma diferencial exata. Neste caso, a equação total tem a forma

$$\mathrm{d}u = 0\,,\ \text{onde } u = \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(y)\,\mathrm{d}y\,,$$

o que leva a: $u = \displaystyle\int f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int f_2(y)\,\mathrm{d}y = c$, sendo c uma constante arbitrária.

Caso as variáveis não estejam separadas, não podemos resolver a equação diferencial, de forma simples, como acima.

<u>Exemplo:</u> $x\,\mathrm{d}y + (1-y)\,\mathrm{d}x = 0$

Neste caso, nenhum dos termos da equação pode ser integrado diretamente. Entretanto, dividindo os termos por $x(1-y)$, obteremos as variáveis separadas, e a equação fica:

$\dfrac{\mathrm{d}y}{1-y} + \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = 0$, cuja solução será então obtida por integração:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln c$$

$$-\ln(1-y) + \ln x = \ln c$$

$$\ln \frac{x}{1-y} = \ln c$$

$$\Rightarrow\ x = c(1-y)$$

<u>OBS:</u> incluimos $\ln c$ como constante, para simplificar os cálculos, como se pode ver imediatamente.

A equação diferencial acima se enquadra no caso resumida a seguir:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)\ \Rightarrow\ \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Podemos integrar ambos os membros da igualdade de modo independente.

<u>Exemplos:</u>

1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x(1-y^2)^{1/2} = 0$ (1^{a} ordem, 1^{o} grau, separável)

Solução:

$$\frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^{1/2}} + x\,\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow \underbrace{\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}}_{\text{Problema já resolvido}} + \int x\,\mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{sen}^{-1} y + \frac{1}{2}x^2 = c$$

$$y = \mathrm{sen}\left(c - \frac{1}{2}x^2\right)$$

2) $y - \ln\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$ (1ª ordem, 1º grau, separável)

Solução:

$$y = \ln\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \ \Rightarrow \ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y \ \Rightarrow \ e^{-y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \ \int e^{-y}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x \ \Rightarrow \ -e^{-y} = x - c$$

$$\Rightarrow \ e^{-y} = c - x \ \Rightarrow \ -y = \ln(c-x)$$

$$\boxed{y = -\ln(c-x)}$$

Exercícios:

Resolva as equações.

1) $(2x+1)\,\mathrm{d}y - 3y\,\mathrm{d}x = 0$

Solução: $\div$ ambos os termos por $y(2x+1)$ fica:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} - \frac{3\,\mathrm{d}x}{2x+1} = 0$$

$$\ln y - \frac{3}{2}\ln(2x+1) = \ln c$$

$$\ln y - \ln(2x+1)^{3/2} = \ln c \ \Rightarrow \ \frac{\ln y}{\sqrt{(2x+1)^3}} = \ln c$$

$$\frac{y}{\sqrt{(2x+1)^3}} = c \Rightarrow y = c\sqrt{(2x+1)^3}$$

ou

$$y^2 = c'(2x+1)^3$$

2) $(y^2-1)\,\mathrm{d}x-(2y+xy)\,\mathrm{d}y=0$

<u>Solução:</u> $(y^2-1)\,\mathrm{d}x-y(2+x)\,\mathrm{d}y=0$

$\div$ ambos os termos por $(y^2-1)(2+x)$ fica:

$$\frac{\mathrm{d}x}{2+x}-\frac{y\,\mathrm{d}y}{y^2-1}=0$$

$$\ln(2+x)-\frac{1}{2}\ln(y^2-1)=\ln c$$

$$\ln\frac{2+x}{\sqrt{y^2-1}}=\ln c\ \Rightarrow\ \boxed{y^2-1=c(2+x)}$$

3) $y\,\mathrm{d}x+(x+xy)\,\mathrm{d}y=0$

<u>Solução:</u> $y\,\mathrm{d}x+x(1+y)\,\mathrm{d}y=0$

$\div\, xy$ ambos os termos:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{(1+y)\,\mathrm{d}y}{y}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\mathrm{d}y=0\ \Rightarrow\ \ln x+\ln y+y=c$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\ln xy+y=c}$$

4) $x\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2$

<u>Solução:</u> $x\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2-y\ \Rightarrow\ \dfrac{\mathrm{d}y}{y(y-1)}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{\mathrm{d}y}{y}+\frac{\mathrm{d}y}{y-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}-\frac{\mathrm{d}y}{y-1}=0$$

$$\ln x+\ln y-\ln(y-1)=\ln c$$

$$\ln\frac{xy}{y-1}=\ln c\ \Rightarrow\ \boxed{xy=c(y-1)}$$

$$\frac{1}{y(y-1)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}$$

$$Ay-A+By=1$$

$$(A+B)y-A=1$$

$$A+B=0\ \Rightarrow\ A=-B$$

$$-A=1\ \Rightarrow\ A=-1;\ B=+1$$

5) $\mathrm{d}x-\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}y=0$

<u>Solução:</u> $\div$ ambos os termos por $\sqrt{a^2-x^2}$, fica:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\mathrm{d}y=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\mathrm{d}y\ \Rightarrow\ \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)=y+c$$

$$\frac{x}{a} = \operatorname{sen}(y+c)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = a\operatorname{sen}(y+c)}$$

6) $e^{x-y}\,\mathrm{d}x + e^{y-x}\,\mathrm{d}y = 0$

Solução: $\dfrac{e^x}{e^y}\,\mathrm{d}x + \dfrac{e^y}{e^x}\,\mathrm{d}y = 0$

$\times$ por $e^x e^y$ ambos os termos:

$$\Rightarrow e^{2x}\,\mathrm{d}x + e^{2y}\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\ln(e^{2x}) + \cancel{\frac{1}{2}}\ln(e^{2y}) = c$$

$$\boxed{e^{2x} + e^{2y} = c}$$

6.3 Equações homogêneas

Caso em que a função $F(x,y)$ na equação $y' = F(x,y)$, tem a forma de $f(y/x)$.

Por exemplo: $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + \dfrac{y}{x}$,

corresponde a um tipo da equação geral:

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$; neste caso, fazer:

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u \Rightarrow x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = f(u)$$

Esta última equação é separável, e pode ser escrita na forma:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln|x| = \int \frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}}$$

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = f(u)$$

$$x\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}x = f(u)\,\mathrm{d}x$$

$$x\,\mathrm{d}u = \big(f(u) - u\big)\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}$$

Exemplos:

1) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y + x = 0$ (1ª ordem, 1º grau, homogênea)

Fazer: $\boxed{y = ux} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

$\Rightarrow \cancel{x}\left(u + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) - 2u\cancel{x} + \cancel{x} = 0$ Equação cujas variáveis podem ser separadas.

$u\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}u - 2u\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x = 0$

$x\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x = 0$

$x\,\mathrm{d}u + (1-u)\,\mathrm{d}x = 0$

$x\,\mathrm{d}u = (u-1)\,\mathrm{d}x$

$\dfrac{\mathrm{d}u}{u-1} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

$\ln(u-1) = \ln x + \ln c$

$u - 1 = cx$

$\dfrac{y}{x} - 1 = cx$

$\boxed{y = x + cx^2}$

2) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y \Rightarrow \div x$ e fazer $y = ux$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 + \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(ux)}{\mathrm{d}x} = 1 + \dfrac{u\cancel{x}}{\cancel{x}}$

$\cancel{u} + x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 + \cancel{u} \Rightarrow \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow u = \ln|x| + c$

mas $\boxed{y = ux} \Rightarrow y = ux = x\{\ln|x| + c\}$

Exercício: Achar uma curva que passe pelo ponto $(0,-2)$, de modo que a inclinação da tangente em quaisquer de seus pontos seja igual à ordenada do ponto, aumentada de 3 unidades.

Solução: Equação diferencial da família de curvas que satisfazem à condição dada:

$(*)_1 \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + 3$

Separando as variáveis e integrando obtemos:

$\dfrac{\mathrm{d}y}{y+3}$

Separando as variáveis e integrando obtemos:

$\dfrac{\mathrm{d}y}{y+3} = \mathrm{d}x \Rightarrow \ln(y+3) = x + c \quad (*)_2$

Como a curva deve passar por $(0, -2)$, temos:

$y\big|_{x=0} = -2 \quad (*)_3$

Fazendo $(*)_3$ em $(*)_2$, encontramos o valor de c:

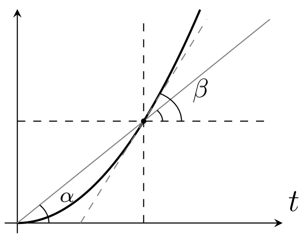
$\ln|-2+3| = 0 + c \;\Rightarrow\; \ln|1| = c \;\Rightarrow\; \boxed{c = 0}$

A equação $(*)_2$ fica:

$x = \ln|y+3| \;\Rightarrow\; y + 3 = e^x \;\Rightarrow\; \boxed{y = e^x - 3}$

Exercício: Achar a curva para a qual a inclinação da tangente em qualquer ponto é n vezes maior que a inclinação da reta que une este ponto com a origem das coordenadas.

Solução:



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = n\frac{y}{x} \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = n\frac{\mathrm{d}x}{x} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow\; \ln|y| = n\ln|x| + \ln c$$

$$\ln|y| = \ln|x|^n + \ln c$$

$$\ln|y| = \ln\big(c|x|^n\big)$$

$$\boxed{y = cx^n}$$

Exercício: $x\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x + y = 0$

Solução:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 + \frac{y}{x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1 - \frac{y}{x}; \text{ fazer } u = \frac{y}{x};\; y = ux$$

$$\frac{\mathrm{d}(ux)}{\mathrm{d}x} = -1 - u$$

$$u + x\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 - u$$

$$x\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -1 - 2u$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{\mathrm{d}u}{1+2u} \;\Rightarrow\; \ln|x| = -\frac{1}{2}\ln|1+2u| + \ln C$$

$\ln|x| = \ln\{|1+2u|^{-1/2} \cdot c\}$

$x = \dfrac{c}{\sqrt{1+2u}} \Rightarrow x = \dfrac{c}{\sqrt{1+2\,\dfrac{y}{x}}}$

$x^2\left(1+2\,\dfrac{y}{x}\right) = c^2 = c'$

$\boxed{x^2 + 2xy = c'}$

Exercício: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x+y}{2y-x}$; $y = ux$; $u = \dfrac{y}{x}$

Solução:

$u + x\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2\cancel{x} + u\cancel{x}}{2u\cancel{x} - \cancel{x}}$

$x\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2+u}{2u-1} - u$

$x\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2+u-2u^2+u}{2u-1}$

$x\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2+2u-2u^2}{2u-1}$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{(2u-1)}{2+2u-2u^2}\,\mathrm{d}u$

$\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{(2u-1)}{2(1+u-u^2)}\,\mathrm{d}u$

$\ln|x| = -\dfrac{1}{2} \times \ln|1+u-u^2| + \ln C$

$\ln|x| = \ln|1+u-u^2|^{-1/2} \cdot C$

$x = \dfrac{C}{\sqrt{1+u-u^2}} \Rightarrow x^2 = \dfrac{C^2}{(\sqrt{1+u-u^2})^2}$

$x^2 = \dfrac{C'}{1+u-u^2} \Rightarrow x^2 + ux^2 - u^2x^2 = C'$

$x^2 + \dfrac{y}{\cancel{x}}\,x^{\cancel{2}} - \dfrac{y^2}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{x^2} = C'$

$\boxed{x^2 + xy - y^2 = C'}$

6.4 Equações lineares

Fórmula geral: $a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)\,y = Q(x)$

Equaçõe lineares de primeira ordem podem ser escritas como:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)\,y = g(x)$$

Para resolver este tipo de equação utilizamos o "fator integrante" que pode ser obtido como descrito a seguir.

Inicialmente vamos examinar a equação fazendo $g(x) = 0$. Ao realizarmos este procedimento, além de linear, a equação se torna separável, podendo ser integrada como uma equação deste tipo. Então:

$(*)\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -f(x) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = -f(x)\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow\; \ln y = -\int f(x)\,\mathrm{d}x + c$

$y = Ae^{-\int f(x)\mathrm{d}x} \;\Rightarrow\; ye^{\int f(x)\mathrm{d}x} = A$

Diferenciando a última equação em relação a x, fica:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{ye^{\int f(x)\mathrm{d}x}\right\} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x} + y \cdot e^{\int f(x)\mathrm{d}x} \cdot f(x) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$

$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)y\right) e^{\int f(x)\mathrm{d}x} = 0$

A expressão acima corresponde à equação inicial $(*)$ multiplicada por $I(x) = e^{\int f(x)\mathrm{d}x}$, o que leva a sua diferencial exata passível de ser integrada diretamente. $I(x)$ é denominado "fator integrante".

Voltando à equação original, podemos escrever, após multiplicarmos ambos os membros por $I(x)$:

$\left\{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + f(x)y\right\} I(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(yI(x)\Big) = g(x)I(x)$

$\Rightarrow\; yI(x) = \int g(x)I(x)\,\mathrm{d}x + c$

dividindo por $I(x)$, obteremos y como função de x.

Exemplo 1: $\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = e^{-x}$

Solução: Fator integrante: $I(x) = e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} = e^{x}$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[yI(x)\big] = g(x)I(x)$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ye^x) = e^{-x} \cdot e^x = 1 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}(ye^x)}{\mathrm{d}x} = \int \mathrm{d}x$

$\Rightarrow ye^x = x + c$

$\Rightarrow y = (x + c)e^{-x}$

Exemplo 2: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = \operatorname{sen} x$

Solução: Fator integrante: $I(x) = e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} = e^x$

$\dfrac{\mathrm{d}(ye^x)}{\mathrm{d}x} = e^x \operatorname{sen} x \Rightarrow \boxed{ye^x = \displaystyle\int e^x \cdot \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x + c} \quad (*)$

OBS: $\displaystyle\int e^x \cdot \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

Integrando por partes:

$u = e^x$; $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$; $v = -\cos x$

$\Rightarrow \displaystyle\int e^x \cdot \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = e^x(-\cos x) - \int (-\cos x)e^x\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,\mathrm{d}x$

Integrando por partes novamente

$U = e^x$; $\mathrm{d}U = e^x\,\mathrm{d}x$

$\mathrm{d}V = \cos x\,\mathrm{d}x$; $V = \operatorname{sen} x$

$\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$

$\Rightarrow 2\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$

$\displaystyle\int e^x \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$

Voltando a $(*)$, fica:

$ye^x = \dfrac{1}{2}\, e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + c$

$y = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \cos x) + ce^{-x}$

Exercícios:

1) $y' + f(x)y = g(x)$; Fator integrante: $\boxed{I = e^{\int f(x)\mathrm{d}x}}$

$\Rightarrow\ x^2y' - y = 0$

$y' + f(x)y = g(x)$

$$\frac{x^2y'}{x^2} - \frac{y}{x^2} = \frac{0}{x^2}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$y' - \frac{y}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow\ I = e^{\int(-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x}$$

$$y' - \frac{1}{x^2}\,y = 0$$

$$I = e^{-\frac{x^{-1}}{-1}} = e^{x^{-1}}$$

$\Rightarrow$ multiplicar todos os termos pelo fator integrante I:

$$y' \cdot e^{x^{-1}} + y \cdot e^{x^{-1}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\boxed{f' \cdot g + f \cdot g' = (f \cdot g)'}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}(y \cdot e^{x^{-1}})}{\mathrm{d}x} = 0;\ \mathrm{d}(y \cdot e^{x^{-1}}) = 0\,\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\ y = \frac{C}{e^{x^{-1}}} \text{ ou } y = \frac{c}{e^{1/x}}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{y = ce^{-1/x}}$$

Outra forma de resolver; utilizando a transformada de Lagrange:

$$y' - \frac{1}{x^2}\,y = 0$$

$$y = e^{-\int f(x)\mathrm{d}x}\left[\int g(x)\,e^{\int f(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right]$$

$$y = e^{-\int(-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x}\left[\int 0 \cdot e^{\int(-\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right]$$

$$y = e^{\int x^{-2}\mathrm{d}x}\left[\int 0 \cdot \mathrm{d}x + c\right] = e^{\frac{x^{-2+1}}{-2+1}}[C + c] = e^{\frac{x^{-1}}{-1}} \cdot C$$

$$\boxed{y = Ce^{-1/x}}$$

2) $y' - 3y = 6$ OBS: Equação do tipo $\boxed{y' + f(x)y = g(x)}$

$$\begin{cases} f(x) = -3 \\ g(x) = 6 \end{cases}$$

$I = e^{\int (-3) \mathrm{d}x} = e^{-3x}$

Multiplicar termos pelo fator integrante $I = e^{-3x}$

$y' \cdot e^{-3x} + y \cdot e^{-3x} \cdot (-3) = 6e^{-3x}$

$\boxed{f' \cdot g + f \cdot g'}$

$\dfrac{\mathrm{d}(y \cdot e^{-3x})}{\mathrm{d}x} = 6e^{-3x}$

$\displaystyle\int \mathrm{d}(y \cdot e^{-3}) = 6 \int e^{-3x} \, \mathrm{d}x$

$y \cdot e^{-3x} = 6 \cdot e^{-3x} \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$ye^{-3x} = -2e^{-3x} + c$

$y = -\dfrac{2e^{-3x}}{e^{-3x}} + \dfrac{c}{e^{-3x}}$

$\boxed{y = -2 + ce^{3x}}$

6.5 Desintegração radioativa e datação de fósseis pelo método do carbono-14

Vamos considerar uma população de átomos radioativos de um tipo e que esses átomos têm a mesma chance de desintegração, independente dos átomos vizinhos. Neste modelo, consideramos que, a taxa de desintegração do conjunto de átomos é proporcional ao número de átomos presentes em cada instante.

Equação diferencial do problema:

$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$

$\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda \, \mathrm{d}t$

$\Rightarrow \ln |N| = -\lambda t + c$

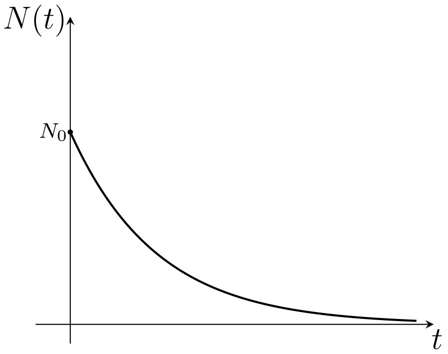
$\Rightarrow N = e^{-\lambda t + c}$

$\Rightarrow \boxed{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$, com $N_0 = N(0)$

$N(t)$: número de átomos radioativos no instante t

λ: constante de desintegração (positiva, na expressão)

ou seja, N_0 é o nº de átomos radioativos no instante inicial da avaliação da população de átomos radioativos.



Meia-vida (intervalo Δt para o qual 50% dos átomos radioativos se recompõem):

$N_1 = N_0 e^{-\lambda t}$; $N_2 = N_0 e^{-\lambda(t+\Delta t)}$

$\Rightarrow N_2 = N_0 e^{-\lambda t} e^{-\lambda \Delta t}$

$\Rightarrow N_2 = N_1 e^{-\lambda \Delta t} \Rightarrow \dfrac{N_2}{N_1} = e^{-\lambda \Delta t} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow -\lambda \Delta t = \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -0{,}69315$

$T_{1/2} = \Delta t = \dfrac{-\ln(0{,}5)}{\lambda} = \dfrac{0{,}69315}{\lambda}$

$$\boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}}$$

Atividade da amostra radioativa:

$A = \lambda N$; $A = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow A = \dfrac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}} = A_0 \left[2^{-t/T_{1/2}}\right]$

OBS: $\left(\dfrac{t}{T_{1/2}}\right)$: nº de período de meia-vida

Vida-média $\bar{T}$:

Seja uma fonte hipotética com atividade constante A_0, até o instante $\bar{T}$, quando todos os átomos da amostra se desintegram ao mesmo tempo. Vida-média é a média aritmética do tempo de vida dos átomos radioativos da amostra. Por exemplo, a vida-média ($\bar{T}$) do Iodo-131, usado na composição de um sal para destruir células cancerígenas, é de 8 dias. Isto significa que em média, cada átomo demora 8 dias para se desintegrar, ou que num conjunto de 8 átomos de Iodo-131, apenas 1 átomo irá se desintegrar por dia, em média.

$\Rightarrow \lambda_{\text{Iodo-131}} = \frac{1}{8}\text{dia}^{-1}$; $\boxed{\bar{T} = \frac{1}{\lambda}}$

Datação radioativa utilizando carbono-14

Em altitudes muito elevadas da atmosfera, nêutrons provenientes da ação de raios cósmicos bombardeando átomos de nitrogênio-14, dão origem ao isótopo radioativo carbono-14, o qual reage com o oxigênio do ar, produzindo CO_2 radioativo. Este CO_2 radioativo juntamente com o CO_2 não radioativo (contendo ${}^{12}_{6}C$) é absorvido pelos vegetais e ao longo da cadeia trófica, chegando aos organismos.

<u>Exercício:</u> Uma árvore ativa apresenta uma taxa de decaimento de carbono-14 de 13,6 contagens por minuto por grama. Uma outra peça de madeira, antiga do mesmo tipo de árvore, apresenta um decaimento de 3,2 contagens por minuto, por grama. Perguntas: a) Estimar a idade da peça antiga de madeira, considerando a meia-vida do carbono-14 como 5730 anos. b) Quantas contagens por minuto, por grama seriam medidas, caso a peça antiga de madeira, tivesse idade aproximada de 20000 anos?

<u>Solução:</u>

a) $N = N_0 e^{-\lambda t}$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{5730} = 1{,}21 \times 10^{-4} \text{ por ano}$$

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t$$

$$\begin{cases} N_0 = 13{,}6 \\ N = 3{,}2 \end{cases} \Rightarrow \ln\left(\frac{3{,}2}{13{,}6}\right) = -(1{,}21 \times 10^{-4})t$$

$$-(1{,}21 \times 10^{-4})t = \ln(0{,}23529)$$

$$t = \frac{-1{,}4469}{-1{,}21 \times 10^{-4}} = 11958 \text{ anos}$$

b) $N = N_0 e^{-\lambda t}$

$$N = 13{,}6 e^{-(1{,}2097\times 10^{-4})(20000)}$$

$$N = 13{,}6 e^{-2{,}4194} = 13{,}6 \times 0{,}08897$$

$$\boxed{N = 1{,}21 \text{ decaimentos}/(\text{min}/\text{g})}$$

Exercício: Uma peça de madeira de uma tumba antiga, contém 40% do carbono-14 por unidade de massa que está presente em árvores ativas atuais. Há quanto tempo (na hipótese mais próxima da atual) o objeto foi construído?

OBS: usar meia-vida do carbono-14 como 5730 anos.

Solução: Após 5730 anos, o número de átomos radioativos da amostra original cai à metade.

$N = N_0 e^{-\lambda t}$

$\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda T_{1/2}$

$-\ln 2 = -\lambda T_{1/2} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{0{,}6931}{5730} = 0{,}000120968$

$0{,}40\cancel{N_0} = \cancel{N_0} e^{-0{,}000120968t}$

$\ln(0{,}40) = -0{,}000120968t$

$-0{,}91629 = -0{,}000120968t$

$t = 7574, 6$ anos

$\boxed{t \approx 7574 \text{ anos}}$

6.6 Lei de Newton do Resfriamento

Considerar um corpo sem aquecimento interno com temperatura T maior do que o meio.

Como a temperatura vai baixar em função do tempo?

$T = T(t)$; $T_0 = T(0)$; T_r constante: é a temperatura do meio

Taxa de resfriamento: Podemos considerar:

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_r)$, k: condição de troca de calor

$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -kT + kT_r$

$T(t) = Ae^{-kt} + \frac{\cancel{k}T_r}{\cancel{k}}$

condição inicial $T = T_0$ quando $t = 0$

$\Rightarrow T_0 = A + T_r \Rightarrow A = T_0 - T_r$

$\Rightarrow \boxed{T(t) = T_r + (T_0 - T_r)e^{-kt}}$

Como $t \to \infty \Rightarrow 2^{\text{o}}$ termo vai para zero

$\Rightarrow T_{t\to\infty}(t) = T_r$

6.7 Lei de Lambert-Beer

Permite avaliar a atenuação da intensidade da luz devida à absorção por moléculas de um determinado meio. Podemos afirmar que, para soluções diluídas, o decréscimo da intensidade da luz em função da espessura do meio absorvente é diretamente proporcional à intensidade da luz incidente (Lei de Lambert). Sendo:

I : intensidade da luz incidente
$\mathrm{d}I$: pequeno decréscimo da intensidade da luz ao passar pela distância $\mathrm{d}x$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} \propto I \implies -\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = \mu I$$

$$\Rightarrow \int_{I_0}^{I_l} \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\mu \int_0^l \mathrm{d}x \qquad \left\{ \begin{array}{l} I_0 : \text{ intensidade na face} \\ \quad \text{anterior do recipiente} \\ I_l : \text{ intensidade na saída} \\ \quad \text{após trajeto de} \\ \quad l \text{ centímetros} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \ln I \Big|_{I_0}^{I_l} = \mu\, l$$

$I_l = I_0 e^{-\mu\, l}$ ou, no caso geral:

$$\boxed{I = I_0 e^{-\mu\, x}}$$

Expressando na base de logaritmo decimais, fica:

$$\log \frac{I}{I_0} = -\left(\frac{\mu}{2{,}303}\right) x$$

$$\text{ou } \log \frac{I}{I_0} = -\mu' x\,, \text{ onde } \mu' = \frac{\mu}{2{,}303}$$

A lei de Lambert acima, foi extendida por Beer, mostrando que, quando a luz passa por uma solução com dada espessura, a fração absorvida depende não apenas da intensidade "I", mas também da concentração "C" da solução. Esta é conhecida como Lei de Beer:

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} \propto C\,.$$

As duas leis combinadas, permitem escrever:

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} \propto I \times C \text{ ou } -\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = b\,I\,C$$

Quando a concentração é expressa em mol·L^{-1}, b é denominado coeficiente de absorção molar. Passando para a base de logaritmos decimais, temos:

$$\log\frac{I}{I_0} = -\frac{b}{2{,}303} \times C \times x$$

$$\Rightarrow \circledast \boxed{\log\frac{I}{I_0} = -\epsilon\,C\,x},$$

onde $\epsilon = (b/2{,}303)$ é denominado coeficiente de extinção molar, expresso em L·m^{-1}·cm^{-1}. A expressão $\circledast$ é denominada usualmente "Lei de Beer-Lambert" ou "Lei de Lambert-Beer".

<u>Fórmulas associadas</u>

$$\log_{10}\frac{I_0}{I} = \epsilon\,l\,C \quad \left(\text{ou } \log_{10}\frac{I}{I_0} = -\epsilon\,l\,C\right)$$

$$\epsilon = \frac{A}{l\,C}$$

$$A = \epsilon\,l\,C;\ A = \epsilon\,C \ (\text{se } l = 1 \text{ cm})$$

$$T = \frac{I}{I_0} = 10^{-\epsilon\,l\,C} \;\Big|\; \%T = 100 \times \frac{I}{I_0}$$

$$A = \log_{10}\frac{1}{T} = -\log_{10}T = \log_{10}\frac{I_0}{I} = \epsilon\,l\,C$$

I_0 : Intensidade da luz incidente na face anterior da amostra

I : Intensidade da luz transmitida

ϵ : Coeficiente de absorção (extinsão) molar, em L·mol^{-1}·cm^{-1}

C : Concentração em mol·L^{-1}

l : Comprimento do caminho da luz na solução absorvente

A : Absorbância

T : Transmitância

<u>Exemplos:</u>

1) Qual a absorbância de uma solução que possui uma transmitância de 20% em um dado comprimento de onda?

   <u>Solução:</u>

   $$\%T = 20 \Rightarrow T = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

$A = -\log_{10} T = -\log_{10} 0{,}2 = -(-0{,}699) = 0{,}699$

2) Se a dissolução no exercício anterior consistir de espécie com concentração de $2{,}30 \times 10^{-4}$ M, e considerando uma célula de análise de 2 cm de espessura, qual deverá ser a concentração da solução para se obter uma transmitância de 8%?

Solução:

$$\boxed{\begin{array}{c} M = \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ \text{(molaridade)} \end{array}}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon &= -\frac{\log_{10} T}{l\,C} \\
&= -\frac{\log 0{,}2}{2 \text{ cm} \times 2{,}3 \times 10^{-4} \text{ M}} \\
&= \left(\frac{0{,}699}{2 \times 2{,}3 \times 10^{-4}}\right) = 0{,}1520 \times 10^{4} \\
&= 1520 \text{ Mol}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}
\end{aligned}$$

$$A = -\log_{10} T = \epsilon\, l\, C$$

$$C = -\frac{\log_{10} T}{\epsilon\, l} = \frac{-\log_{10}\left(\frac{8}{100}\right)}{1520 \text{ M}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} \times 2 \text{ cm}} = \frac{-\log_{10}(0{,}08)}{1520\text{M} \times 2}$$

$$C = \frac{1{,}0969}{3040} \text{ M} = 3{,}6 \times 10^{-4}\text{M}$$

3) Um dado composto apresenta absorbância máxima a 275 nm, de $\epsilon_{275} = 8400\text{M}^{-1}\cdot\text{cm}^{-1}$, sendo a largura da cubeta do espectrofotômetro de 1 cm. Neste comprimento de onda, foi medida uma absorbância de $A_{275} = 0{,}70$. Qual a concentração do composto acelerado?

Solução:

$A = \epsilon\, l\, C\,; \quad 0{,}70 = (8400\text{M}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}) \times (1\text{cm}) \times C$

$C = 8{,}33 \times 10^{-5}$ $\text{Mol}\cdot\text{L}^{-1}$

4) Seja uma solução contendo uma substância na concentração de 4 $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Considerando uma largura de cubeta do espectrofotômetro de 2 cm e o fato do que 50% da luz incidente seja transmitida, calcule o coeficiente de absorção (ϵ).

Solução:

Pela Lei de Beer-Lambert:
$\log_{10}\dfrac{I}{I_0} = -\log_{10}\left(\dfrac{0{,}5}{1{,}0}\right) = A = 8\epsilon \Rightarrow \epsilon = 0{,}03\ \mathrm{M^{-1}{\cdot}cm^{-1}}$

5) No exemplo anterior, quanto do feixe é transmitido quando a concentração vale 8 mol·L^{-1}?

   Solução:

   $\log_{10}\left(\dfrac{I_0}{I}\right) = \epsilon\, l\, C$

   $\log_{10}(1) - \log_{10}(I) = 0 - \log_{10}(I) = 0{,}0376 \times 8 \times 2 = 0{,}6016$

   $\Rightarrow\ I_{\text{transmitido}} = 0{,}2503 \approx 25\%$

6.8 Reações Químicas

Imaginemos uma reação do tipo: A + B $\longrightarrow$ C + D, iniciando com os reagentes A e B, para a qual a velocidade do desaparecimento de A é proporcional à concentração de A em cada instante. Neste caso, podemos escrever:

$$-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} \propto [\mathrm{A}]$$

Se isto ocorrer também para B, de forma independente de [C] e [D], fica:

$$-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} \propto [\mathrm{A}][\mathrm{B}] \implies \boxed{-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]},$$

onde a constante de proporcionalidade k é a constante de velocidade, e a equação acima, a equação de velocidade. A constante k é independente da concentração de A e B, mas depende da temperatura.

Ordem da reação:

A ordem da reação relativamente a uma dada espécie química, é dada pelo expoente da concentração da espécie na equação.

Ex.:

$$-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{X}]}{\mathrm{d}t} = k[\mathrm{X}][\mathrm{Y}]^2$$

1ª ordem em relação a X
2ª ordem em relação a Y
3ª ordem global

A reação A + B $\longrightarrow$ C + D, como indicado acima, é uma reação de 1ª ordem em relação a A e B.

Seja uma reação do tipo A $\longrightarrow$ produtos, de 1ª ordem, representada pela equação:

$$-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = k[\mathrm{A}] \Rightarrow \frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{[\mathrm{A}]} = -k\,\mathrm{d}t$$

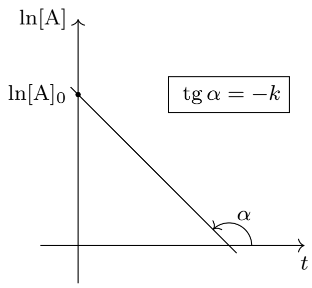
$$\Longrightarrow \ln[\mathrm{A}] = -k\,t + \ln[\mathrm{A}]_0 \qquad (*)_1$$

ou

$$[\mathrm{A}] = [\mathrm{A}]_0 e^{-k\,t} \qquad (*)_2$$

A representação de $(*)_1$ em um gráfico semilogarítmico, leva a uma reta, com inclinação $\operatorname{tg} x = -k$, pois

$$\underbrace{\ln[\mathrm{A}]}_{y} = \underbrace{-k\,t}_{a\,x} + \underbrace{\ln[\mathrm{A}]_0}_{b}$$



$$k = -\frac{\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t}}{[\mathrm{A}]}$$

Gráfico de $\circledast_1$

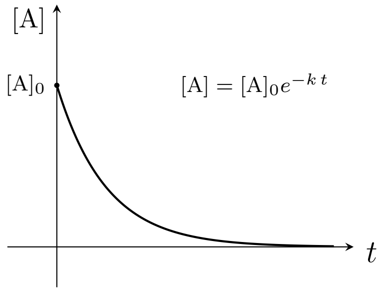


Gráfico de $\circledast_2$

Meia-vida:

A meia-vida de uma reação, corresponde ao tempo necessário para que a concentração do reagente caia à metade do seu valor inicial.

Usando $\circledast_1 \Rightarrow \ln[\mathrm{A}] = -k\,t_{1/2} + \ln[\mathrm{A}]_0$

$$k\,t_{1/2} = \ln[\mathrm{A}]_0 - \ln[\mathrm{A}]_{1/2}$$

$$k\,t_{1/2} = \frac{\ln[\mathrm{A}]_0}{[\mathrm{A}]_{1/2}} \Rightarrow k\,t_{1/2} = \frac{\ln[\mathrm{A}]_0}{\frac{1}{2}[\mathrm{A}]_0} = \ln 2$$

$$\Longrightarrow \quad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0{,}653}{k}$$

Exercício:

1) Escreva a equação da velocidade e determine o valor da constante de velocidade para a decomposição térmica da fosfina a 680ºC.

$$4\,\mathrm{PH_3(g)} \longrightarrow \mathrm{P_4(g)} + 6\,\mathrm{H_2(g)}$$

Dados:

- velocidade inicial da reação: $1{,}98 \times 10^{-4}$ mol·L^{-1}·s^{-1} para $[\mathrm{PH_3}]$ inicial de $1{,}00 \times 10^{-2}$ mol·L^{-1};
- velocidade inicial de $8{,}91 \times 10^{-4}$ mol·L^{-1}·s^{-1}, quando $[\mathrm{PH_3}]$ inicial for de $4{,}5 \times 10^{-2}$ mol·L^{-1}.

Solução:

$\mathrm{PH_3}$ (mol/L)	velocidade (mol·L^{-1}·s^{-1})
$1{,}00 \times 10^{-2}$	$1{,}98 \times 10^{-4}$
$4{,}50 \times 10^{-2}$	$8{,}91 \times 10^{-4}$

Para verificar a ordem da reação:

$$\left.\begin{aligned} \frac{4{,}50 \times 10^{-2}}{1{,}00 \times 10^{-2}} &= 4{,}50 \times 10^{-2} \\ \frac{8{,}91 \times 10^{-4}}{1{,}98 \times 10^{-4}} &= 4{,}50 \times 10^{-2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1^{\text{a}} \text{ ordem}$$

Equação: $\dfrac{\mathrm{d}[\mathrm{PH_3}]}{\mathrm{d}t} = -k[\mathrm{PH_3}]$

$$-k = \frac{\mathrm{d}[\mathrm{PH_3}]/\mathrm{d}t}{\mathrm{PH_3}} = \frac{1{,}98 \times 10^{-4}}{1{,}00 \times 10^{-2}} = 1{,}98 \times 10^{-2} \text{ mol·L}^{-1}\text{·s}^{-1}$$

6.9 Equação fundamental da Hidrostática

Para um fluido incompressível podemos considerar $\rho = \text{cte}$.

p: pressão
z: posição no eixo vertical
ρ: densidade do fluido
g: aceleração da gravidade

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho\, g = 0$$

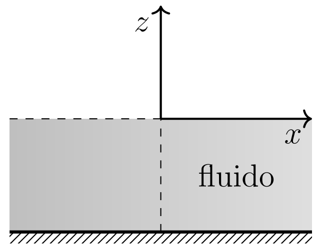
$$\mathrm{d}p = -\rho\, g\, \mathrm{d}z$$

$$\int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p = -\rho\, g \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z$$

$$p_2 - p_1 = -\rho\, g(z_2 - z_1)$$

$$\Delta p = -\rho\, g\, \Delta z \,\text{(eixo orientado para cima)}$$

$$\Delta p = \rho\, g\, \Delta z \,\text{(eixo orientado para baixo)}$$



A diferença de pressão entre dois pontos num fluido em equilíbrio, é numericamente igual ao peso de uma coluna de líquido de seção reta igual à unidade de área e altura igual à distância entre os dois planos isobáricos que passam pelos pontos.

Esta equação também pode ser aplicada à variação de pressão em gases, como na atmosfera.

Exemplo: Variação da pressão atmosférica com a altitude. Vamos considerar como aproximação a temperatura constante.

Solução:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho\, z = 0\,, \ \text{ considerando o eixo } z \text{ apontando para cima.}$$

Dividindo ambos os membros da igualdade por p, fica:

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \frac{\rho}{p}\, g = 0\,; \ \text{Fazer } k = \frac{\rho}{p}$$

$$\frac{1}{p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + k\, g = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -k\, g\, \mathrm{d}z$$

$$\ln p = -k\, g\, z + c$$

$$p = A\, e^{-kgz}\,; \ A = p_0$$

$$\Rightarrow \boxed{p = p_0 e^{-kgz}}$$

$$\textbf{OBS: } \frac{\rho}{p} = \frac{m}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{pressão}}}{p}V} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ massa} \\ \leftarrow \text{ volume} \end{array}$$

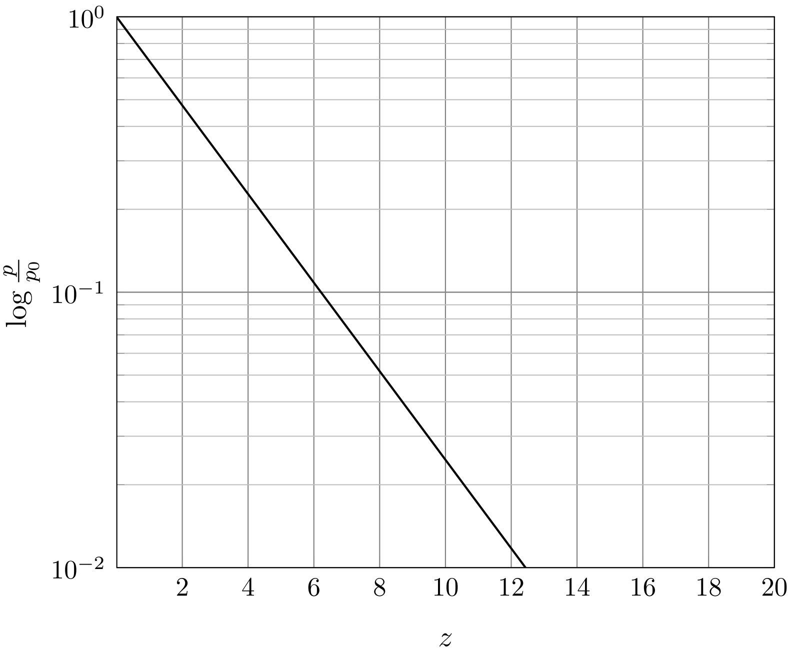
$$\Rightarrow \frac{\rho}{p} = \text{cte, pois:}$$

$m = \text{cte}$, $pV = \text{cte}$ em função da aproximação inicial $T = \text{cte}$

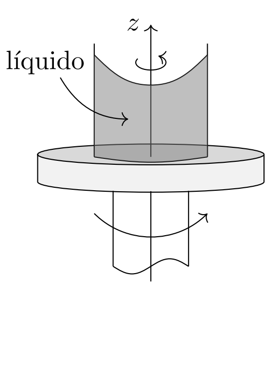
Exemplo prático: a 20ºC, 1L de ar tem massa ≈ 1,3g; pressão normal ≈ $1{,}0 \times 10^5$ N/m^2.

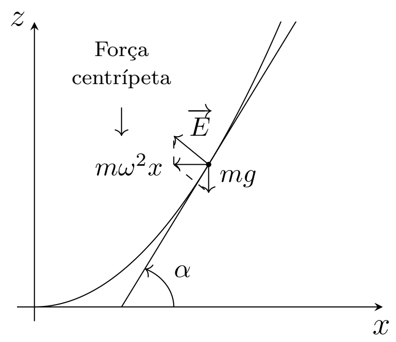
$\Rightarrow \dfrac{p}{p_0} = e^{-1{,}3\times 10^{-4} z} \implies k_{\text{ar}} = 1{,}3 \times 10^{-5}$ kg/N·m

$\Rightarrow \dfrac{p}{p_0} = e^{-z/2{,}7}$; com z em km.



6.10 Líquidos em rotação





$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

Seja a equação da meridiana (seção da superfície por qualquer plano que passe pelo eixo de simetria):

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 x}{g}$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}z = \frac{\omega^2}{g}\int x\,\mathrm{d}x$$

$$z = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + c$$

$$\boxed{z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2}$$

$\overrightarrow{E}$: resultante das forças de superfície é $\perp$ à superfície livre (isóbara)

Peso $(m\,g)$: vertical

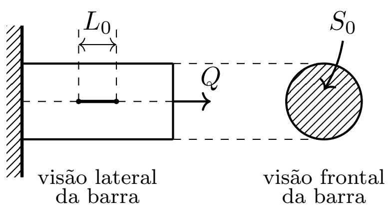
Resultante $(m\,\omega^2 x)$: Força centrípeta $= \overrightarrow{E} + \overrightarrow{P}$

OBS: A meridiana é uma parábola.

6.11 Módulo de Elasticidade e Módulo de Resiliência

Na caracterização mecânica dos materiais e biomateriais, o "ensaio de tração", quando possível, é um dos mais importantes.

Seja uma barra metálica cilíndrica, como a da figura abaixo, presa em uma das extremidades com seção transversal de área S_0, onde está marcada uma distância L_0, como indicado.



Q: Força de Tração

S_0: Área da seção transversal

L_0: Distância de referência

$\epsilon = \dfrac{\Delta L}{L_0}$: Deformação

ΔL: Acréscimo devido à força Q

$\sigma = \dfrac{Q}{S_0}$: Tensão $= \dfrac{\text{Força}}{\text{Área}}$

A tensão média na barra é dada por $\sigma = Q/S_0$, e sua aplicação causa aumento de ΔL na distância original L_0. A deformação média será $\sigma = \Delta L/L_0$.

A tensão σ corresponde à grandeza Força/Área, enquanto ϵ é adimensional.

Para um corpo de prova metálico, é possível obter um gráfico *Tensão* $\times$ *Deformação*, que dá diversas informações sobre as propriedades do material, em particular o "módulo de elasticidades" $E = \sigma/\epsilon$ ou "módulo de Young".

N = início do ensaio de tração, o traçado é linear, sendo $E = \sigma/\epsilon$, o coeficiente angular da reta.

A linearidade do diagrama termine num ponto denominado "limite elástico" (A). Tentos acima deste valor causam deformações permanentes. Em sequência ao ponto A obtém-se o ponto A', denominado "limite da proporcionalidade".

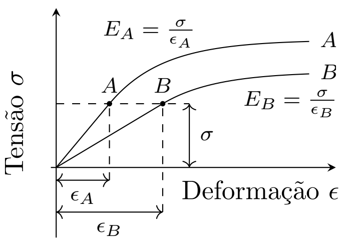
Terminada a "zona elástica" atinge-se a "zona plástica". Não há mais proporcionalidade entre tensão e deformação.

Limite de resistência: $\sigma_r = \dfrac{Q_r}{S_0}$, Q_r: carga máxima atingida durante o ensaio.

Após esta fase, (atingida Q_r) entra-se na fase de ruptura material.

Módulo de Elasticidade "E"

"E" é constante para cada metal ou liga metálica. Módulo de elasticidade é a medida da regidez do material.



$\epsilon_A < \epsilon_B$

$E_A > E_B$

Comparação entre a rigidez de dois materiais (A e B).

OBS: $E \propto \dfrac{1}{T}$; o módulo da elasticidade varia inversamente com a temperatura.

Resiliência

Resiliência é a capacidade de um metal em absorver energia quando deformada elasticamente, e liberá-la quando descarregado. Sua medida é feita pelo "módulo de resiliência" = Energia de deformação por unidade de volume, necessária para tensionar o material da origem até a tensão do limite de proporcionalidade.

Modelo de Resiliência

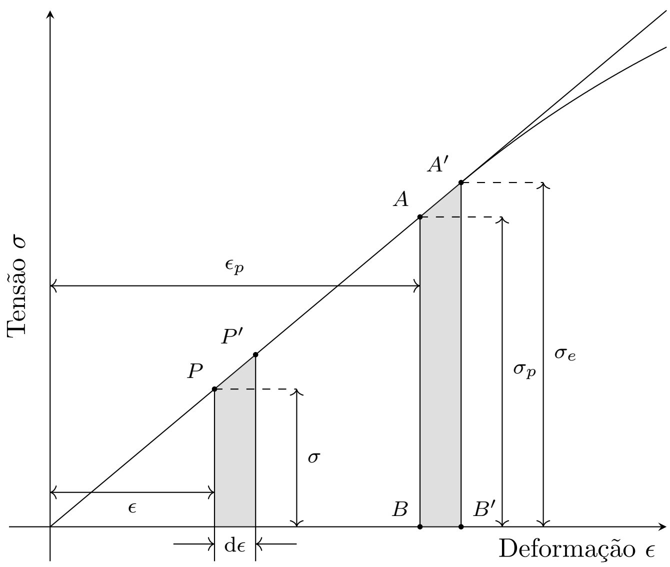
U_r = O trabalho exercido para tensionar até o limite de proporcionalidade. É igual à *tensão média* multiplicada pela *deformação* ϵ_p causada.

$$U_r = \frac{\sigma_p}{2} \cdot \epsilon_p = \frac{\sigma_p}{2} \cdot \underbrace{\frac{\sigma_p}{E}}_{E=\frac{\sigma_p}{\epsilon_p}}, \quad \sigma_p : \text{ limite de proporcionalidade}$$

$$\boxed{U_r = \frac{\sigma_p^2}{2E}}$$

O *módulo* de resiliência pode também ser obtido considerado a parte elástica do diagrama tensão-deformação. Tensionando o espécime do ponto p ao ponto p', o trabalho executado é $\sigma\,\mathrm{d}\epsilon$.

$$\begin{aligned} U_r &= \int_0^{\epsilon_p} \sigma\epsilon\,\mathrm{d}\epsilon = \int_0^{\epsilon_p} E\epsilon\,\mathrm{d}\epsilon = E\left[\frac{\epsilon^2}{2}\right]_0^{\epsilon_p} \\ &= E\,\frac{\epsilon_p^2}{2} \\ U_r &= \left(\frac{E}{2}\right)\left(\frac{\sigma_p^2}{E^2}\right) = \boxed{\frac{\sigma_p^2}{2E}} \end{aligned}$$



Exercício: Mostre que a grandeza de U_r pode ser: Energia/Volume.

6.12 Equação de van der Waals e o ponto crítico de um gás

Diversas equações procuram modelar o comportamento de gases reais, dentre as quais, a equação de van der Waals, se destaca. Diferente da equação dos “gases perfeitos” ou “gases ideais” ($pV = nRT$ ou $p = nRT/V$), a equação de van der Waals leva em consideração o volume ocupado pelas moléculas do gás e suas propriedades específicas quanto às interações intermoleculares e consequências na pressão final do gás, num dado recipiente.

Equação de van der Waals

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2$$

Equação em função do volume molar ($V_m = V/n$):

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2}$$

p: pressão do gás
V: volume do recipiente
n: nº de mols
R: constante dos gases
T: temperatura absoluta
a, b: constantes de van der Waals, características de cada gás
$V_m = \frac{V}{n}$: volume molar

OBS:

1) Verifique que, quando V_m alto, a expressão tende para a dos gases perfeitos ($p = nRT/V$) pois $V_m - b \approx V_m$ e $a/V_m^2 \to 0$.

2) Para substâncias puras, a isoterma crítica (diagramas $p \times V$) apresenta um ponto de inflexão, o que significa que a 1ª e a 2ª derivadas de p em relação a V_m, a T constante (isoterma crítica) neste ponto são nulas. Escreve-se:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T = 0\,; \ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_m^2}\right)_T = 0$$

Então, para calcular p_c, V_c e T_c (crítico) temos a equação original e outras duas novas equações.

Esta condição física é fundamental para uma aplicação biológica: a secagem de uma amostra biológica para posterior observação por microscopia eletrônica de varredura (MEV), com máxima deformação do material original. Pelo fato do material biológico ser rico em água, e a tensão superficial da água ser relativamente alta, o "método do ponto crítico" é de fundamental importância para análise de células e tecidos.

Exercícios:

1) Obter a expressão da equação de van der Waals em função do volume molar (V_m) e discutir as condições que levam ao comportamento do gás perfeito.

Solução:

Equação original $p = \dfrac{nRT}{V-nb} - a\left(\dfrac{n}{V}\right)^2$

Dividir os numeradores e denominadores do 1º e 2º termos à direita da igualdade por n. Fica:

$$p = \frac{\frac{nRT}{n}}{\frac{V-nb}{n}} - a\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{V}{n}}\right)^2 ; \text{ com } \frac{V}{n} = V_m$$

À temperatura elevadas e volumes molares grandes $\approx$ gás perfeito

$$\boxed{p = \frac{RT}{V_m - b} - a\,\frac{1}{(V_m)^2}}$$

2) Obter os valores de p, V e T para o ponto crítico, usando a expressão de van der Waals (use a expressão em função de V_m).

Considerando que temos uma função de várias variáveis, e que o ponto crítico é um ponto de inflexão na curva $p \times V$, devem ser utilizadas as seguintes 3 equações:

$$p = \frac{RT}{V_m - b} - a\,\frac{1}{V_m^2},\ \left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T = 0 \text{ e } \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_m^2}\right)_T = 0.$$

Solução:

O ponto de inflexão implica $\dfrac{\partial p}{\partial V_m} = 0$ e $\dfrac{\partial^2 p}{\partial V_m^2} = 0$.

Cálculo das derivadas:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T = -\frac{RT}{(V_m-b)^2} - a(-2V_m^{-3}) = -\frac{RT}{(V_m-b)^2} + \frac{2a}{V_m^3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V_m^2}\right)_T = -RT(-2)(V_m-b)^{-3} - 6aV_m^{-4} = \frac{2RT}{(V_m-b)^3} - \frac{6a}{V_m^4}$$

$$\begin{matrix} \left(\dfrac{\partial p}{\partial V_m}\right)_T = 0 \\ \left(\dfrac{\partial^2 p}{\partial V_m^2}\right)_T = 0 \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} -\dfrac{RT}{(V_m-b)^2} + \dfrac{2a}{V_m^3} = 0 & \leftarrow \times\dfrac{3}{V_m} & \text{e soma as duas expressões} \\ \dfrac{2RT}{(V_m-b)^3} - \dfrac{6a}{V_m^4} = 0 & & \end{matrix} \right.$$

$$-\frac{3RT_c}{V_c(V_c-b)} + \frac{2RT_c}{(V_c-b)^3} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2\cancel{RT_c}}{(V_c-b)^{\cancel{3}}} = \frac{3\cancel{RT_c}}{V_c\cancel{(V_c-b)^2}} \Rightarrow \frac{2}{V_c-b} = \frac{3}{V_c} \Rightarrow 2V_c = 3V_c - 3b$$

$\Rightarrow \boxed{V_c = 3b}$

OBS: T_c: temperatura crítica

V_c: volume crítico

Usando este valor de V_c na equação $\partial p/\partial V_m = 0$, para encontrar T_c, fica:

$$-\frac{RT_c}{(V_c-b)^2}+\frac{2a}{V_c^3}=0 \Rightarrow -\frac{RT_c}{(3b-b)^2}+\frac{2a}{(3b)^3}=0$$

$$-\frac{RT_c}{4\cancel{b}^{\cancel{2}}}+\frac{2a}{27b^{\cancel{3}}}=0 \Rightarrow \boxed{T_c=\frac{8a}{27Rb}}$$

Para encontrar a pressão crítica (p_c), voltamos à expressão original:

$$p_c=\frac{RT_c}{V_c-b}-\frac{a}{V_c}, \text{ com } V_c=3b \text{ e } T_c=\frac{8a}{27Rb}$$

$$p_c=\frac{\cancel{R}\times\frac{8a}{27\cancel{R}b}}{3b-b}-\frac{a}{9b^2}$$

$$\Rightarrow p_c=\frac{8a}{27b\times 2b}-\frac{a}{9b^2}$$

$$\Rightarrow p_c=\frac{\cancelto{4}{8}a}{27\times\cancel{2}b^2}-\frac{a}{9b^2}$$

$$p_c=\frac{4a}{27b^2}-\frac{a}{9b^2}$$

$$p_c=\frac{4a-3a}{27b^2}=\boxed{\frac{a}{27b^2}}$$

6.13 Reações de Segunda Ordem

Seja a reação A+2B $\longrightarrow$ produto, cujos dados de concentração e velocidades de reação para cada componente, estão informados na tabela:

Nº do experimento	[A] inicial, $mol \cdot L^{-1}$	[B] inicial, $mol \cdot L^{-1}$	Velocidade inicial $-\frac{d[A]}{dt}$, $mol \cdot L^{-1} \cdot s^{-1}$
1	0,246	0,269	0,122
2	0,492	0,269	0,488
3	0,246	0,538	0,122

Seja determinar a ordem de reação para os reagentes A e B.

OBS: [A] : concentração do reagente A em mol·L^{-1};
[B] : concentração do reagente B em mol·L^{-1};
$-\dfrac{d[A]}{dt}$: velocidade de A, em mol·L^{-1}·s^{-1}

Solução: Ordem para A:

Variação de A: $\dfrac{[A]_2}{[A]_1} = \dfrac{0{,}492}{0{,}246} = 2$

Variação de $-\dfrac{d[A]}{dt}$: $\dfrac{\left(-\frac{d[A]}{dt}\right)_2}{\left(-\frac{d[A]}{dt}\right)_1} = \dfrac{0{,}488}{0{,}122} = 4$

Considerando que a concentração de A dobrou, enquanto que a velocidade correspondente quadriplicou, concluímos que a reação é de ordem 2, o que leva à equação de velocidade:

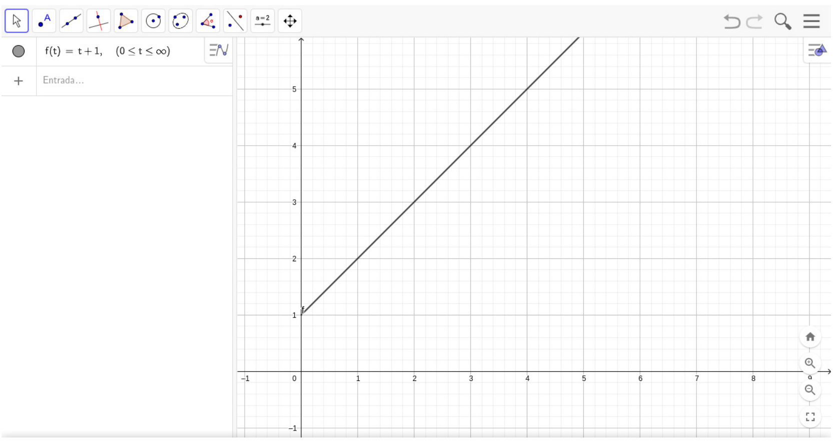
$$-\frac{d[A]}{dt} = k[A]^2$$

Resolvendo a equação diferencial (por separação de variáveis), temos:

$-\displaystyle\int \frac{d[A]}{[A]^2} = \int k\,dt$; condição inicial $[A] = [A]_0$ em $t = 0$

$\dfrac{1}{[A]} = kt + c \Rightarrow t = 0 \Rightarrow [A] = [A]_0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{[A]} = kt + \dfrac{1}{[A]_0}}$

Para esta expressão, podemos plotar uma reta, com t como abscissa e $1/[A]$ como ordenada, o que pode ser prático, experimentalmente, e uma característica específica para reações de 2ª ordem.



Isolando [A] obtemos a expressão cartesiana para [A] em função de t.

$\dfrac{1}{[\mathrm{A}]} = kt + \dfrac{1}{[\mathrm{A}]_0}$; fazendo $[\mathrm{A}] = y$

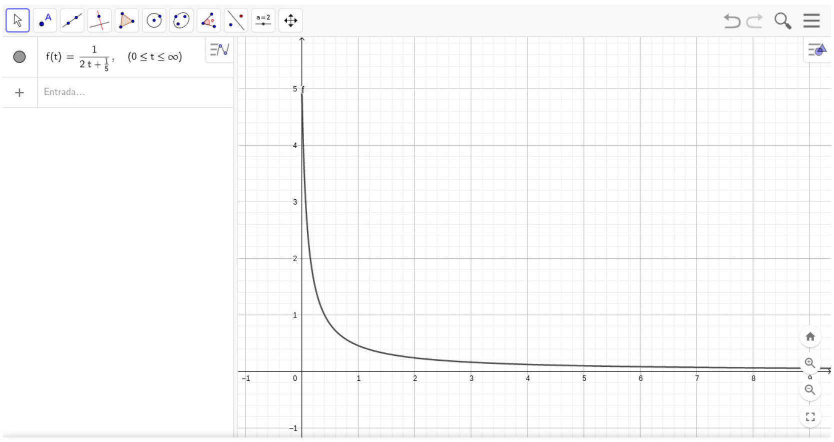
$$\frac{1}{y} = kt + c \Rightarrow 1 = kty + cy$$

$$\Rightarrow 1 = y(kt + c) \Rightarrow y = \frac{1}{kt + c}$$

Para $t = 0$, temos $y_0 = \dfrac{1}{c} \Rightarrow \boxed{c = \dfrac{1}{y_0}}$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{kt + \frac{1}{y_0}}}$$

$$\Rightarrow [\mathrm{A}] = \frac{1}{kt + \frac{1}{[\mathrm{A}]_0}}$$



Exercício 2: Seja uma reação do tipo $2\,\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C} + 3\,\mathrm{D}$, cujos dados de velocidade iniciais são dados na tabela:

$[\mathrm{A}]_{\text{inicial}}$ mol·L^{-1}	$[\mathrm{B}]_{\text{inicial}}$ mol·L^{-1}	$\left(-\dfrac{\mathrm{d[A]}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{inicial}}$ mol·L^{-1}·s^{-1}
0,127	0,346	$1{,}64 \times 10^{-6}$
0,254	0,346	$3{,}28 \times 10^{-6}$
0,254	0,692	$1{,}31 \times 10^{-5}$

Perguntas:

a) Qual a equação de velocidade ($-\mathrm{d}[\mathrm{A}]/\mathrm{d}t$) da reação?
b) Qual o valor da constante de velocidade?
c) Qual a velocidade de consumo de A, quando $[\mathrm{A}] = 0{,}100$ mol·L^{-1} e $[\mathrm{B}] = 0{,}200$ mol·L^{-1}?

<u>Solução:</u>

a) $\dfrac{[\mathrm{A}]_2}{[\mathrm{A}]_1} = \dfrac{0{,}254}{0\,127} = 2; \qquad \dfrac{\left(-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t}\right)_2}{\left(-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t}\right)_1} = 2$

$\Rightarrow$ grau 1 para A

$$\frac{[\mathrm{B}]_2}{[\mathrm{B}]_1} = \frac{0{,}692}{0\,346} = 2; \qquad \frac{\left(-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{B}]}{\mathrm{d}t}\right)_3}{\left(-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{B}]}{\mathrm{d}t}\right)_2} = 4$$

$\Rightarrow$ grau 2 para B

$\Rightarrow$ Equação: $\boxed{-\dfrac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}]^2}$

b) Valor da constante de velocidade

$$k = \frac{-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t}}{[\mathrm{A}][\mathrm{B}]^2} = \frac{1{,}64 \times 10^{-6}}{0{,}127 \times (0{,}346)^2} = 1{,}08 \times 10^{-4}\,(\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1})^2\mathrm{s}^{-1}$$

ou

$$k = \frac{3{,}28 \times 10^{-6}}{0{,}254 \times (0{,}346)^2} = 1{,}08 \times 10^{-4}(\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1})^2\mathrm{s}^{-1}$$

ou

$$k = \frac{1{,}31 \times 10^{-5}}{0{,}254 \times (0{,}692)^2} = 1{,}08 \times 10^{-4}(\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1})^2\mathrm{s}^{-1}$$

c) $\left(-\dfrac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t}\right)_{\substack{[\mathrm{A}]\,=\,0{,}100\\ [\mathrm{B}]\,=\,0{,}200}} = 1{,}08 \times 10^{-4} \times 0{,}1 \times (0{,}2)^2 = 1{,}08 \times 10^{-5} \times 0{,}04$

$$\Rightarrow \left(-\frac{\mathrm{d}[\mathrm{A}]}{\mathrm{d}t}\right)_{\substack{[\mathrm{A}]\,=\,0{,}100\\ [\mathrm{B}]\,=\,0{,}200}} = \boxed{4{,}32 \times 10^{-7}\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}}$$

6.14 Exercícios

1) Um nuclídeo radioativo é fabricado numa razão de 8 nuclídeos por segundo, mas ao mesmo tempo, o nuclídeo se desintegra em função de N, onde N é o número de núcleos presentes em cada instante. Escreva a equação diferencial deste problema e resolva a equação. Considere a situação onde o número de núcleos do nuclídeo a ser produzido no instante inicial, seja zero. Desenhe o gráfico de N em função de t.

Solução:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = g - kN \Rightarrow \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = g\left(1 - \frac{k}{g}N\right) \; ; \; \frac{k}{g} = p$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = g(1 - pN) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}N}{1 - pN} = g\,\mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow -\ln|1 - pN| = gt + c$$

$$\ln|1 - pN| = -gt + c'$$

$$1 - pN = Ae^{-gt}$$

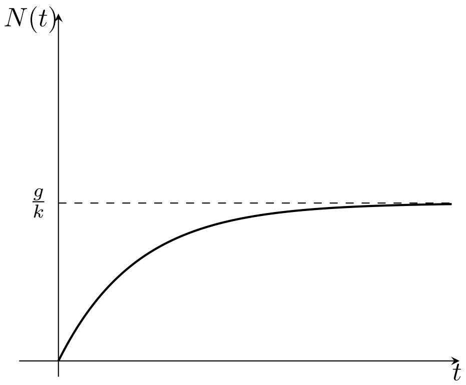
$$pN = 1 - Ae^{-gt}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{p}(1 - Ae^{-gt}) \Rightarrow \boxed{N = \frac{g}{k}(1 - Ae^{-gt})}$$

condição inicial: $N(0) = 0 \Rightarrow 0 = \dfrac{g}{k}(1 - A)$

$$\Rightarrow A\frac{g}{k} = \frac{g}{k} \Rightarrow \boxed{A = 1}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-gt})$$



$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow N(0) = 0 \\ t \to \infty \Rightarrow N_\infty = \dfrac{g}{k} \end{cases}$$

2) Variação do número de indivíduos de uma população, em função da

taxa de natalidade, taxa de mortalidade e imigração.

Escreva uma equação diferencial (e apresente uma solução) que represente um processo de nascimento, morte e o efeito de imigração. Considere $N(0) = N_0$.

Solução:

$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N - \mu N + \nu;$

com $\lambda > 0$; $\mu > 0$: $\nu > 0$

$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (\lambda - \mu)N + \nu$

OBS: Equação do tipo mostrado no box à direita; $y' = ay + b$

$\Rightarrow N(t) = ce^{(\lambda-\mu)t} - \frac{\nu}{\lambda - \mu}$

Como $N(0) = N_0$, a solução particular fica:

$N_0 = c - \frac{\nu}{\lambda - \mu} \;\Rightarrow\; c = N_0 + \frac{\nu}{\lambda - \mu}$

$\Rightarrow N(t) = \left(N_0 + \frac{\nu}{\lambda - \mu}\right) e^{(\lambda-\mu)t} - \frac{\nu}{\lambda - \mu}$

$\Rightarrow \boxed{N(t) = N_0 e^{(\lambda-\mu)t} + \frac{\nu}{\lambda - \mu}(e^{(\lambda-\mu)t} - 1)}$

$N(0)$: nº de indivíduos no instante t

λ: taxa de natalidade

μ: taxa de mortalidade

ν: termo relacionado à imigração (independente de $N(t)$)

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay + b$; com $a \neq 0$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(y + k)$

$\mathrm{d}y = a(y + k)\mathrm{d}t$

$\frac{\mathrm{d}y}{y + k} = a\,\mathrm{d}t$

$\ln|y + k| = at + C$

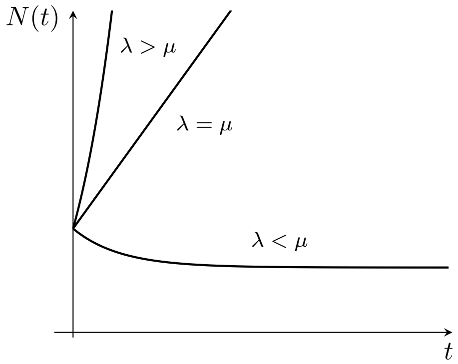
$y + k = \pm e^{at+C} = ce^{at}$, com $c = \pm e^C$

$\Rightarrow \boxed{y = ce^{at} - \frac{b}{a}}$

Comentários:

– Caso a taxa de mortalidade seja maior do que a de mortalidade ($\lambda > \mu$), a população crescerá. Em caso contrário, a população decresce.

– Caso $\lambda = \mu$, a população se manterá estável.



3) **Lei de resfriamento de Newton**

Isaac Newton desenvolveu uma fórmula para calcular a temperatura de um material à medida que perde calor. Seja um corpo sem aquecimento intenso, com temperatura mais elevada do que a sua vizinhança, considerado como um reservatório de calor, ou seja, cuja temperatura é mantida, enquanto o corpo original se resfria.

Qual a equação diferencial que representa a variação da temperatura do corpo em função do tempo? Condição inicial $T(0) = T_0$.

Solução:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_{\text{viz}})$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{(T - T_{\text{viz}})} = -k\,\mathrm{d}t$$

$$\ln(T - T_{\text{viz}}) = -kt + C$$

$$T - T_{\text{viz}} = e^{-kt+C}$$

$$(*) \quad T = ce^{-kt} + T_{\text{viz}}$$

condição inicial $T(0) = T_0$

$$\Rightarrow T_0 = c + T_{\text{viz}} \Rightarrow c = T_0 - T_{\text{viz}}$$

em $(*)$ fica:

$$\Rightarrow T(t) = (T_0 - T_{\text{viz}})e^{-kt} + T_{\text{viz}}$$

$$\Rightarrow T(t) = T_{\text{viz}} + (T_0 - T_{\text{viz}})e^{-kt}$$

T: temperatura

t: tempo

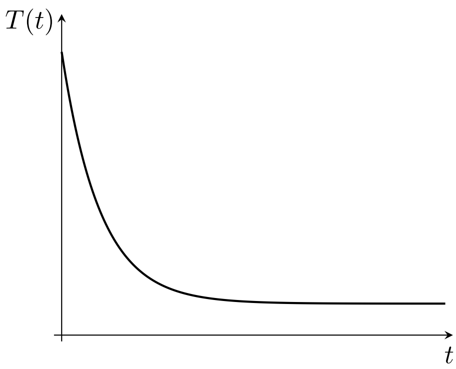
k: constante dependente da troca de calor

T_{viz}: temperatura da vizinhança, mantida constante

Comentários:

$$t = 0 \Rightarrow T(0) = \cancel{T_{\text{viz}}} + T_0 - \cancel{T_{\text{viz}}} = T_0$$

$t \to \infty \Rightarrow T = T_{\text{viz}}$



Apêndice A

Tabelas

$f(x)$	$f'(x)$
a (a constante)	0
x^n	nx^{n-1} (n inteiro $\neq 0$)
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$ $(a > 0)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$ $(x > 0)$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$ $(x > 0)$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$
$\sec x$	$\sec x \operatorname{tg} x$
$\operatorname{cossec} x$	$-\operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x$
$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec}^2 x$
$\operatorname{arcsen} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\|x\| < 1)$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\|x\| < 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$	$\frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccsc} x$	$\frac{-1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$
a, a constante	$ax + c$ (c constante)
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (n inteiro $\neq -1$)
x^{-1}	$\ln\|x\| + c$
e^x	$e^x + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$ ($a > 0$ e $a \neq 1$)
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\operatorname{sen} x + c$
$\operatorname{tg} x$	$\ln\|\sec x\| + c$
$\operatorname{cotg} x$	$\ln\|\operatorname{sen} x\| + c$
$\sec^2 x$	$\operatorname{tg} x + c$
$\operatorname{cossec}^2 x$	$-\operatorname{cotg} x + c$
$\sec x \ \operatorname{tg} x$	$\sec x + c$
$\operatorname{cossec} x \ \operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec} x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsen} x + c$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + c$
$\frac{-1}{1+x^2}$	$\operatorname{arccot} x + c$
$\frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcsec} x + c$
$\frac{-1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccsc} x + c$

Referências Bibliográficas

[1] AGUIAR, A.F.A.; XAVIER, A.F.S.; RODRIGUERS, J.E.U. Cálculo para Ciências Médicas e Biológicas. São Paulo: editora HARBRA ltda, 1988.

[2] AYRES JR, F. Equações diferenciais. COLEÇÃO SCHAUM. AO LIVRO TÉCNICO LTDA Rio de Janeiro, 1959.

[3] BATSCHELET, E. Introdução à matemática para biocientistas. EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, 1978.

[4] BEZERRA, M.J. Curso de Matemática para os cursos de segundo grau – Curso Completo – 3ª edição. Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1974.

[5] BURGMEIER, J.W.; BOISEN JR.; LARSEN, M.D. Calculus with applications. McGraw Hill International Editions, 1990.

[6] CARDUS, D. Introdución a las matemáticas para médicos y biólogos. Editorial Vicens Vices, Barcelona, 1972.

[7] CURLE, N. Equações diferenciais aplicadas. EDITORA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, 1975.

[8] CUSCHIERI, A.; BAKER, P.R. Introduction to research in Medical Sciences.

[9] CHURCHILL GOVOROV, V.; DYBOV, P.; MIROSHIN, N.; SMIRNOVA, S. Problems in mathematics. MIR PUBLISHERS, 1986.

[10] LIVINGSTONE, Edinburgh London and New York, 1977.

[11] LIMA, E.L. Logaritmos. Sociedade Brasileira de matemática, 2009.

[12] NUSSENZVEIG, H.M. Curso de física básica. Editora Edgard Blucher Ltda, 2017, v.1.

[13] QUINET, J. ENCICLOPÉDIA TÉCNICA UNIVERSAL GLOBO, volume VII. MATEMÁTICA SUPERIOR, Tomo I: COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA – AS DERIVADAS E SUAS APLICAÇÕES. Editora Globo, 1966.

[14] RUSSEL, J.B. Química Geral. Makron Books, 1994, v.2.

[15] SAWYER, W.W. Prelude to mathematics. Dover Publications, Inc., New York, 1982.

[16] SEELEY, R. Cálculo de uma variável. Rio de Janeiro: AO LIVRO TÉCNICO, 1974, V.1.

[17] SOUZA, S.A. Ensaios mecânicos de materiais metálicos. 4.ed. São Paulo: EDITORA EDGARD BLUCHER LTDA, 1974.

[18] STEWART, J. Cálculo, volume 1. São Paulo: CENGAGE Learning, 2012.

[19] WHIPKEY, K.; WHIPKEY, M.N. Cálculo e suas múltiplas aplicações. EDITORA CAMPUS LTDA, Rio de Janeiro, 1982.